Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist bei jenen Zufallsexperimenten anwendbar, bei denen genau *zwei verschiedene, einander ausschließende* Ereignisse eintreten können. Bei diesen so genannten BERNOULLI-Experimenten kommt es also nur darauf an, ob ein Ereignis E oder das Gegenereignis E′ eintritt.
Es gibt also nur zwei Versuchsausgänge mit den Wahrscheinlichkeiten:
$P(E) = \mathbf{p}$ ist die **„Erfolgswahrscheinlichkeit"** und
$P(E') = \mathbf{q = 1 - p}$ ist die **„Wahrscheinlichkeit für den Misserfolg".**
Die *diskrete* Zufallsvariable X = Anzahl der Versuche (0, 1, ... , n), in denen das Ereignis E eintritt, heißt

n-p-binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\boxed{f(x) = P(X = k) = b_{n;p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$.

Damit kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass das Ereignis E bei n Versuchen genau k-mal eintritt.

Für die Verteilungsfunktion gilt: $\boxed{F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Formeln für die Kennwerte:

$$\left.\begin{array}{ll} E(X) = \mu = \mathbf{np} & \textbf{Erwartungswert} \\ V(X) = \sigma^2 = \mathbf{npq = np(1-p)} & \textbf{Varianz} \\ \sqrt{V(X)} = \sigma = \sqrt{\mathbf{npq}} = \sqrt{\mathbf{np(1-p)}} & \textbf{Standardabweichung} \end{array}\right\} \text{ der Binomialverteilung}$$

Typische Aufgaben für Bernoulli-Experimente sind der Münzwurf, KO-Spiele, Zielschießen, Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen, Werfen eines Würfels, Qualitätskontrollen.

Aufgabe 12: Eine Münze wird 50-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 27-mal „Zahl" erscheint. Ermittle den Erwartungswert und die Standardabweichung und deute sie im Kontext.

$n = 50, p = 0{,}5$ und $q = 0{,}5$.

Damit: $P(X=27) = b_{50;0,5}(27) = \binom{50}{27} \cdot 0{,}5^{27} \cdot 0{,}5^{23} \approx 0{,}096 \approx 9{,}6\%$

$E(X) = \mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}5 = 25$, d.h. man kann bei 50 Würfen nahezu 25-mal „Zahl" erwarten.

$\sqrt{V(X)} = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 3{,}5$, das ist ein Maß für die Streuung der Zufallsvariablen um den Erwartungswert 25. Zu einem hohen Prozentsatz gilt also $21{,}5 \le X \le 28{,}5$. M.a.W. Es besteht eine hohe Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Würfen die „Zahl" zwischen 22-mal und 28-mal erscheint.

Aufgabe 13: Bei einem KO-Spiel geht es nur um Gewinn oder Verlust. Lukas und Max spielen 7 Sätze Badminton. Max ist der bessere Spieler, er hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 65% für jeden Satz.

Berechne den Wert $\binom{7}{4} \cdot 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^3$. Welche Bedeutung hat der Wert im obigen Zusammenhang?

$\binom{7}{4} \cdot 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^3 \approx 0{,}144 \approx 14{,}4\%$, das ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max 4 von 7 Sätzen verliert.

Aufgabe 14: Aus einer Urne mit 4 weißen und 8 blauen Kugeln werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Was bedeutet der Ausdruck $\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ in diesem Zusammenhang. Berechne den Wert.

P(weiße Kugel) $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, P(blaue Kugel) $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Mit dem Ausdruck kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, eine blaue und zwei weiße Kugeln zu ziehen. Sie beträgt 0,222 = 22,2%.

Aufgabe 15: Ein Gewehr hat die Trefferwahrscheinlichkeit von 35 %.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Schüssen **(1)** genau einen Treffer, **(2)** genau 2 Treffer, **(3)** mindestens einen Treffer zu erzielen?

(1) p = 0,35; q = 1 – p = 0,65; n = 5; k = 1

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}35^1\cdot 0{,}65^4=0{,}312=31{,}2\%$$

(2) p = 0,35; q = 1 – p = 0,65; n = 5; k = 2

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}35^2\cdot 0{,}65^3=0{,}336=33{,}6\%$$

(3) Gegenereignis: kein Treffer: p = 0,35; q = 1 – p = 0,65; n = 5; k = 0

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot 0{,}35^0\cdot 0{,}65^5=0{,}884=88{,}4\%$$

Aufgabe 16: Bei der Produktion eines Massenartikels gibt es durchschnittlich 5 % Ausschuss.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Serie von 10 Stück **(1)** kein, **(2)** ein, **(3)** höchstens ein **(4)** mindestens ein Stück Ausschuss enthalten ist.

b) Wenn in einer Serie von 50 Stück höchstens 2 Stück Ausschuss enthalten sind, will ein Großmarkt den Massenartikel in sein Sortiment aufnehmen. **(1)** Wie groß ist dafür die Wahrscheinlichkeit? **(2)** Berechne auch den Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung.

a) (1) $p=\frac{5}{100}=0{,}05$; q = 1 – p = 0,95; n = 10; k = 0

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot\underbrace{0{,}05^0}_{=1}\cdot 0{,}95^{10}=0{,}599=0{,}59{,}9\%$$

(2) p = $0{,}05$; q = 1 – p = 0,95; n = 10; k = 1

$$P(X=1)=\binom{10}{1}\cdot 0{,}05^1\cdot 0{,}95^9=0{,}315=31{,}5\%$$

(3) p = 0,05; q = 1 – p = 0,95; n = 10; k = 0, 1

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}599+0{,}315=0{,}914=91{,}4\%$$

(4) p = 0,05; q = 1 – p = 0,95; n = 10; k = 1, 2, …, 10

$$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}599=0{,}401=40{,}1\%$$

b) (1) p = 0,05; q = 1 – p = 0,95; n = 50; k = 0, 1, 2

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\binom{50}{0}\cdot\underbrace{0{,}05^0}_{=1}\cdot 0{,}95^{50}+\binom{50}{1}\cdot 0{,}05^1\cdot 0{,}95^{49}+$$

$$+\binom{50}{2}\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}95^{48}=0{,}077+0{,}202+0{,}261=$$

$$=0{,}540=54\%$$

(2) $\mu=n\cdot p=50\cdot 0{,}05=2{,}5$

$\sigma^2=n\cdot p\cdot q=50\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=2{,}375$