Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Besondere Ereignisse

a) Das **unmögliche Ereignis** hat die Wahrscheinlichkeit 0. $\boxed{P(\{\ \})=0}$

b) Das **sichere Ereignis** hat die Wahrscheinlichkeit 1. $\boxed{P(\Omega)=1}$

c) Wahrscheinlichkeit für das **Gegenereignis** E' von E: $\boxed{P(E')=1-P(E)}$

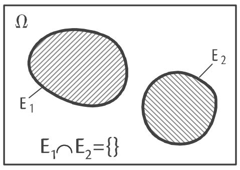
Addtionssatz (Summensatz) für Wahrscheinlichkeiten: „Oder"-Wahrscheinlichkeit

Für **einander ausschließende** (= unvereinbare) **Ereignisse** gilt:

$\boxed{P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2),\ E_1 \cap E_2=\{\ \}}$

Verallgemeinerung für n Ereignisse:

$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_n),\ E_i \cap E_k=\{\ \}\quad \forall i, k \text{ mit } i \neq k$



Multiplikationssatz für Wahrscheinlichkeiten: „Und"-Wahrscheinlichkeit

Für **unabhängige Ereignisse** gilt: $\boxed{P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)}$

Verallgemeinerung: $P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)=P(E_1)\cdot P(E_2)\cdot \ldots \cdot P(E_n)$

Aufgabe 09: In einer Urne befinden sich 3 blaue und 4 rote Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit entweder 2 blaue Kugeln oder 2 rote Kugeln zu ziehen, wenn 2 Kugeln gleichzeitig (also mit einem Griff) gezogen werden?

E_1 ... 2 blaue $\quad g_1=3$

E_2 ... 2 rote $\quad g_2=6$

$m=3+6+3\cdot 4=21$

$$P(E_1)=\frac{g_1}{m}=\frac{3}{21};P(E_2)=\frac{g_2}{m}=\frac{6}{21};P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)=\frac{3}{21}+\frac{6}{21}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}\approx 0{,}429\approx 42{,}9\,\%$$

Aufgabe 10: Berechne die Wahrscheinlichkeit aus einem Preference-Kartenspiel *keinen* König zu ziehen.

Ω...Alle Karten des Kartenspiels: m = 32

E...Karten ohne Könige = übrige Karten: g = 28

E'...König-Karten $g' = 4$

direkte Lösung:

$$P(E)=\frac{g}{m}=\frac{28}{32}=\frac{7}{8}=0{,}875=87{,}5\,\%$$

Lösung mittels Gegenereignis:

$$P(E)=1-P(E')=1-\frac{g'}{m}=1-\frac{4}{32}=\frac{28}{32}=\frac{7}{8}=87{,}5\,\%$$

Aufgabe 11: In einer Urne befinden sich 5 weiße und 8 rote Kugeln. In einer zweiten Urne befinden sich 2 rote und 6 schwarze Kugeln. Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln rot sind?

E_1 ... Aus der ersten Urne wird eine rote Kugel gezogen: $P(E_1)=\frac{8}{13}$

E_2 ... Aus der zweiten Urne wird eine rote Kugel gezogen: $P(E_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$$P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)=\frac{8}{13}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{13}\approx 0{,}154\approx 15{,}4\,\%$$

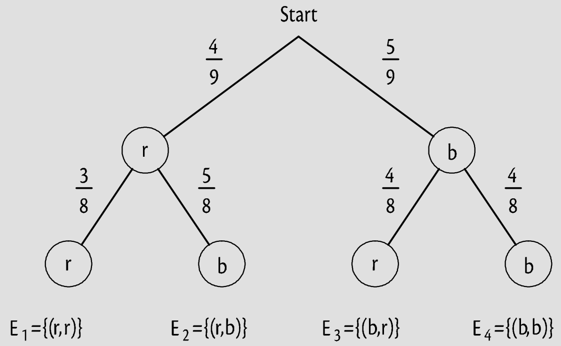
Mehrstufige Zufallsexperimente

Mehrstufige Zufallsexperimente können durch **Baumdiagramme** dargestellt werden.
Jedem Ereignis entspricht ein Pfad in diesem Baum.

Multiplikationsregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ergibt sich durch Multiplikation sämtlicher Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

Additionsregel: Bei Ereignissen, die aus mehreren Pfaden bestehen, werden die einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten addiert.

Aufgabe 12: Eine Urne enthält 4 rote und 5 blaue Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass **A)** zwei rote Kugeln **B)** mindestens eine rote Kugel **C)** höchstens eine rote Kugel **D)** keine rote Kugel gezogen wurde.



$$P(A)=P(E_1)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}\approx 0{,}167\approx 16{,}7\,\%$$

$$P(B)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=$$

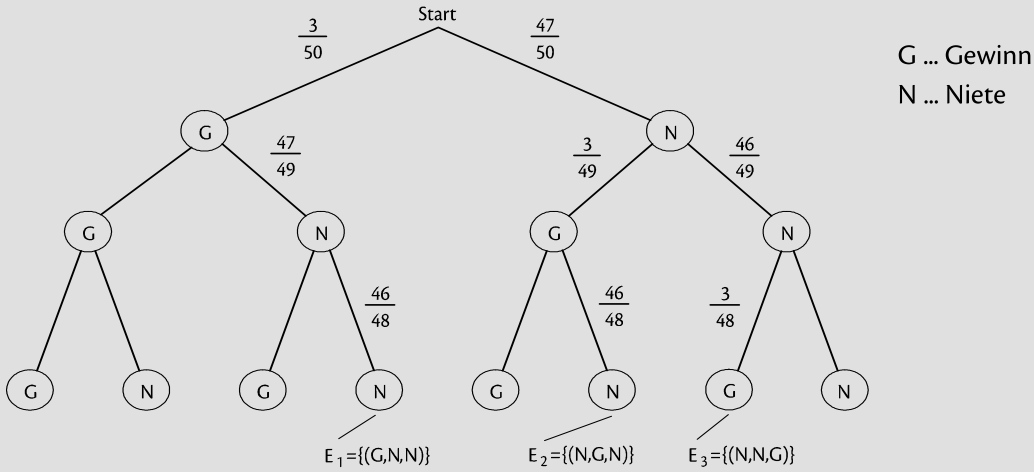
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{52}{72}\approx 0{,}722\approx 72{,}2\,\%$$

$$P(C)=P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{60}{72}\approx 0{,}833\approx 83{,}3\,\%$$

$$P(D)=P(E_4)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{20}{72}\approx 0{,}278\approx 27{,}8\,\%$$

Aufgabe 13: Bei einer kleinen Lotterie gibt es 50 Lose. Darunter sind 3 Gewinnlose, der Rest sind Nieten. Jemand kauft 3 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eines dieser drei Lose gewinnt?



$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=\frac{3}{50}\cdot\frac{47}{49}\cdot\frac{46}{48}+\frac{47}{50}\cdot\frac{3}{49}\cdot\frac{46}{48}+\frac{47}{50}\cdot\frac{46}{49}\cdot\frac{3}{48}=$$

$$=3\cdot\frac{3}{50}\cdot\frac{47}{49}\cdot\frac{46}{48}=\frac{19\,458}{117\,600}\approx 0{,}165\approx 16{,}5\,\%$$