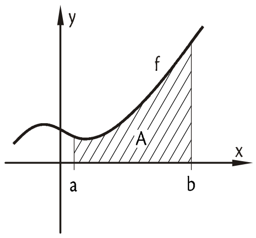
Flächenberechnungen

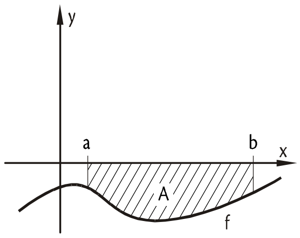
Flächeninhalt eines von einem Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzten Flächenstücks

a) $f(x) \geqslant 0$ in $[a;b]$



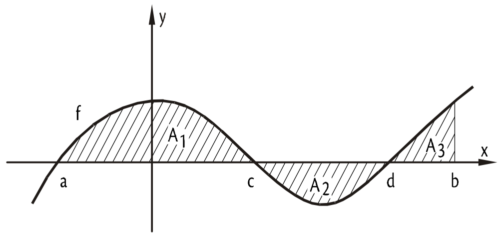
$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

b) $f(x) \leqslant 0$ in $[a;b]$



$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

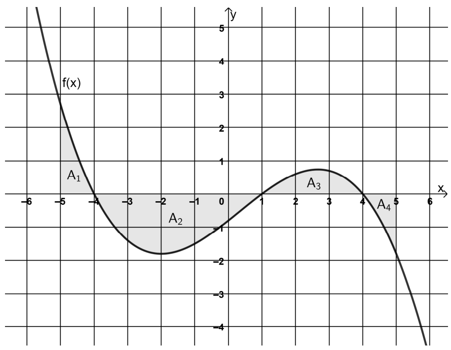
c) $f(x)$ beliebig in $[a;b]$



$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^c f(x)\,dx + \left| \int_c^d f(x)\,dx \right| + \int_d^b f(x)\,dx$$

Anmerkung: Schneidet der Graph von f im vorgegebenen Intervall die x-Achse, so wird das ursprüngliche Integrationsintervall durch die Nullstellen von f in Teilintervalle aufgespaltet. Das Ermitteln möglicher Nullstellen von f im vorgegebenen Intervall ist daher stets vor der Flächenberechnung durchzuführen.

Aufgabe 10: Drücke die Flächeninhalte der Flächenstücke A_1, A_2, A_3 und A_4 durch bestimmte Integrale aus.



$$A_1 = \int_{-5}^{-4} f(x)\,dx = F(-4) - F(-5)$$

$$A_2 = \left| \int_{-4}^{1} f(x)\,dx \right| = \left| F(1) - F(-4) \right|$$

$$A_3 = \int_{1}^{4} f(x)\,dx = F(4) - F(1)$$

$$A_4 = \left| \int_{4}^{5} f(x)\,dx \right| = \left| F(5) - F(4) \right|$$

Aufgabe 11: Berechne den Flächeninhalt des Flächenstückes, welches die x – Achse von der Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ abschneidet.

Ermittle die Integrationsgrenzen, das sind die Nullstellen der gegebenen Funktion.

(1) Nullstellenberechnung:

$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0$

$x_1 = 0,$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4+5} \quad \}3$

$x_2 = 5, x_3 = -1$

(2) Flächenberechnung, Integration:

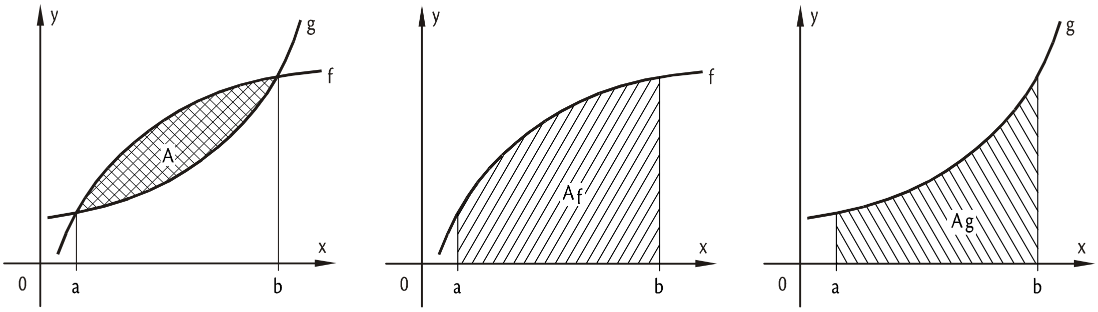
$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - 4x^2 - 5x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} \right) = \frac{11}{12}$$

$$A_2 = \int_{0}^{5} (x^3 - 4x^2 - 5x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} \right) \Bigg|_{0}^{5} = \left(\frac{625}{4} - \frac{500}{3} - \frac{125}{2} \right) - 0 = -\frac{875}{12}$$

$$A = A_1 + \left| A_2 \right| = \frac{11}{12} + \frac{875}{12} = \frac{886}{12} = 73{,}8\dot{3}$$

Flächenberechnungen

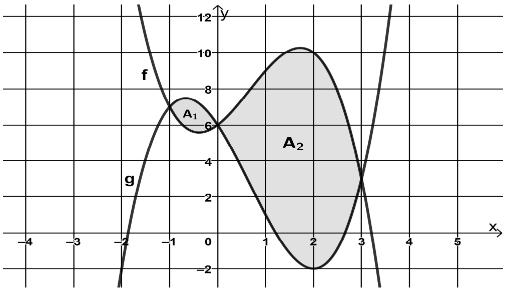
Flächeninhalt eines von zwei Funktionsgraphen begrenzten Flächenstücks



Aus den Figuren ergibt sich: $A = A_f - A_g = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$, wobei a und b die x–Koordinaten von zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten der Funktionsgraphen f und g sind. (dh.: zwei aufeinander folgende Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ bzw. $f(x) - g(x) = 0$).

Anmerkung: Es ist unerheblich, ob Flächenteile teilweise unterhalb oder oberhalb der x – Achse liegen. Es wird immer zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten integriert.

Aufgabe 12: Stelle den Flächeninhalt der von f und g eingeschlossenen Flächenstücke durch bestimmte Integrale dar.



Im Intervall $[-1;\, 0]$ ist $g(x) - f(x) \geq 0$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \left[g(x) - f(x)\right] dx$$

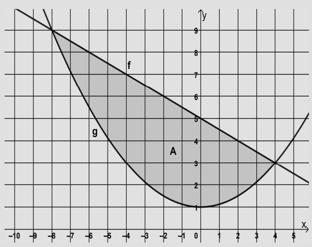
Im Intervall $[0;\, 3]$ ist $f(x) - g(x) \geq 0$

$$A_2 = \int_{0}^{3} \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

$$A = A_1 + A_2$$

Aufgabe 13: Berechne den Flächeninhalt des Flächestückes, das die Gerade f: $y = -\frac{1}{2}x + 5$ von der Parabel g: $y = \frac{1}{8}x^2 + 1$ abschneidet.

(1) Integrationsgrenzen: x-Koordinaten der Schnittpunkte von f und g.



$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$

$g(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$

$f(x) - g(x) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 4$

$-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 4 = 0 \quad |\cdot(-8)$

$x^2 + 4x - 32 = 0$

$x_1 = +4,\ x_2 = -8$

$[a;\, b] = [-8;\, 4]$

(2) Flächenberechnung:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{-8}^{4} \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-8}^{4} = \left[-\frac{64}{24} - \frac{16}{4} + 16\right] - \left[\frac{512}{24} - \frac{64}{4} - 32\right] = \left[-\frac{8}{3} + 12\right] - \left[\frac{64}{3} - 48\right] = 36$$