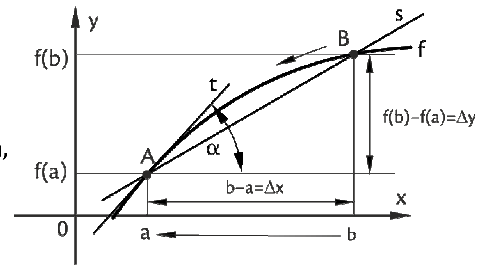
## Differenzen- und Differentialquotient

Der **Differenzenquotient** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entspricht der Steigung der Sekante im betrachteten Intervall.




Nähert sich der Punkt B auf dem Graphen von f beliebig dem Punkt A, dann werden die Abstände $\Delta y$ und $\Delta x$ beliebig klein, und die Sekante wird zur Tangente mit der Steigung

$$\mathbf{k = \tan\alpha = \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Dieser Grenzwert heißt **Differentialquotient** von f an der Stelle a.

$\frac{dy}{dx}$, $y'$ und $f'(a)$ sind Symbole für den Differentialquotienten.

Falls $f'(a)$ existiert, heißt f **differenzierbar** an der Stelle a.
Der Differentialquotient ist ein Maß für die momentane Änderung der Funktion f an der Stelle a.
Er wird auch **momentane Änderungsrate** oder **1. Ableitung** genannt.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Der Differentialquotient}\\ \text{Die momentane Änderungsrate}\end{array}\right\rangle \text{ ist der Grenzwert } \left\langle\begin{array}{l}\text{des Differenzenquotienten.}\\ \text{der mittleren Änderungsrate.}\end{array}\right.$$

Die Gerade t durch den Punkt $A\left(a\middle|f(a)\right)$ mit der Steigung $k=f'(a)$ heißt **Tangente** an den Graphen von f im Punkt A. **Tangentengleichung**: $t: y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$.

$$\text{Ist } f'(a)\begin{cases} >0, \text{dann ist die Tangente steigend.}\\ =0, \text{dann ist die Tangente waagrecht.}\\ <0, \text{dann ist die Tangente fallend.}\end{cases}$$

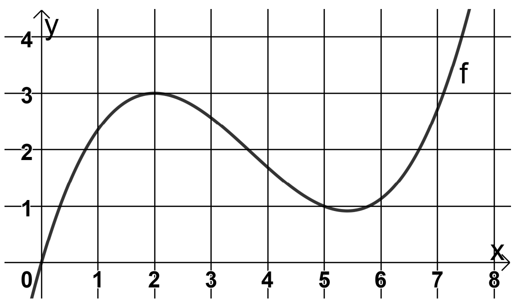
**Aufgabe 04:** Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades.

**a)** Berechne die mittlere Änderungsrate in den Intervallen $[0;2]$ und $[2;5]$.

**b)** Welchen Wert hat der Differentialquotient an der Stelle x = 2?

**c)** In welchem Verhältnis stehen die Differenzenquotienten in den Intervallen $[0;5]$ und $[0;2]$?

**d)** Welche Vorzeichen haben die Differentialquotienten an den Stellen 0 und 5 und was bedeutet das für den Verlauf der dort errichteten Tangente?




**a)** $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}$, $\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{1-3}{5-2}=-\frac{2}{3}$

**b)** An der Stelle x = 2 ist ein Hochpunkt.
Der Differentialquotient hat dort den Wert 0.

**c)** $\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{1-0}{5}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}:\frac{3}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

**d)** $f'(0)>0$ (positiv), die Tangente ist steigend
$f'(5)<0$ (negativ), die Tangente ist fallend.

**Aufgabe 05:** Wie lautet der Ausdruck für den Differentialquotienten, wenn man für $a=x_0$ und für $b-a=h$ einsetzt?

$a=x_0, b-a=b-x_0=h \Rightarrow b=x_0+h$; wenn $b\to a$ strebt, dann strebt $h\to 0$.

Damit: $\lim\limits_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

**Aufgabe 06:** Gegeben ist die reelle Funktion $f: y = 3x^2$.

**a)** Berechne den Differenzen- und Differentialquotienten an einer beliebigen Stelle $a \in D_f$.

**b)** Ermittle auf zwei Arten die Gleichung der Tangente im Punkt $A\left(5 \middle| f(5)\right)$.

$f(a) = 3a^2,\ f(b) = 3b^2$

**a)** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{3b^2-3a^2}{b-a} = 3\cdot\dfrac{b^2-a^2}{b-a} = 3\cdot\dfrac{(b+a)(b-a)}{(b-a)} = 3(b+a)$

$f'(a) = \lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim\limits_{b\to a} 3\cdot(b+a) = 3\cdot\lim\limits_{b\to a}(b+a) = 3\cdot 2a = 6a$

**b) (1)** Von der Gleichung der Tangente in Hauptform $t: y = kx + d$ ist k und d gesucht.
Berechnen von k:
$k = f'(a) = 6a = 6\cdot 5 = 30$ (siehe a))
Berechnen von d:
$f(5) = 3\cdot 5^2 = 75 \Rightarrow A(5|75)$.
$t: y = kx + d$, $A(5|75)$ und k = 30 einsetzen:
$75 = 30\cdot 5 + d \Rightarrow d = -75$, $t: y = 30x - 75$

**(2)** Mit obiger Formel:
$f(5) = 3\cdot 5^2 = 75$
$f'(5) = 6\cdot 5 = 30$
in die Tangentengleichung einsetzen
$t: y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$
$y = f(5) + f'(5)\cdot(x-5)$
$y = 75 + 30\cdot(x-5)$
$t: y = 30x - 75$

| **Physikalische Deutung des Differenzenquotienten und des Differentialquotienten** |
|---|
| Beschreibt die Funktion $s: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $s = s(t)$ die Abhängigkeit des Wegs s von der Zeit t, dann bedeutet |
| $\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ die **mittlere Geschwindigkeit** $\overline{\mathbf{v}}$ im Zeitintervall $\Delta t = [t_1; t_2]$ und |
| $\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$ die **Momentangeschwindigkeit v** zu einem bestimmten Zeitpunkt t. |

**Aufgabe 07:** Die Zeit-Weg-Funktion eines frei fallenden Körpers lautet $s(t) = \dfrac{g}{2}\cdot t^2$; $g \approx 10\,m/s^2$

Berechne **a)** die mittlere Geschwindigkeit in m/s im Zeitintervall [1; 3] Sekunden!

**b)** die Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt $t = 3s$.

**a)** $s(t) \approx 5t^2 \Rightarrow s(3) = 5\cdot 3^2 = 45$ und $s(1) = 5\cdot 1^2 = 5$. $\overline{v} = \dfrac{s(3)-s(1)}{3-1} = \dfrac{45-5}{3-1} = \dfrac{40}{2} = 20\,m/s$

**b)** $v(3) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(3+\Delta t)^2 - 5\cdot 3^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{45+30\cdot\Delta t+5\cdot\Delta t^2-45}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{30\cdot\Delta t+5\cdot\Delta t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(30+5\Delta t) = 30\,m/s$

**Aufgabe 08:** Die Beschleunigung ist der Geschwindigkeitszuwachs pro Zeiteinheit.

Welche Bedeutung haben die Ausdrücke: $\dfrac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ und $\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$?

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ist die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall $\Delta t = [t_1; t_2]$.

$\dfrac{dv}{dt}$ ist die momentane Beschleunigung zu einem bestimmten Zeitpunkt t.

**Aufgabe 09:** Die Leistung P ist die Arbeit W pro Zeiteinheit. Welcher Ausdruck beschreibt

**a)** die mittlere Leistung im Zeitintervall $\Delta t$ **b)** die momentane Leistung zu einem bestimmten Zeitpunkt t?

**a)** $\dfrac{W(t_2)-W(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ **b)** $\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{W(t_2)-W(t_1)}{t_2-t_1} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \dfrac{dW}{dt}$