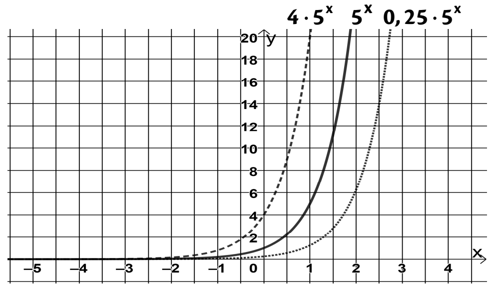
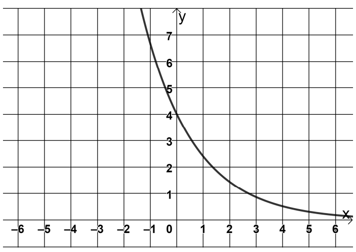
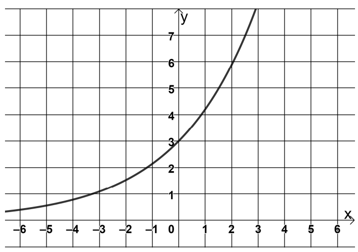
Die Exponentialfunktionen $y = f(x) = a \cdot b^x$ und $y = f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$

Die Funktion f: $\mathbf{y = a \cdot b^x}$ mit a, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ geht aus der Funktion $\mathbf{y = b^x}$ durch eine Formänderung hervor, und zwar gilt: Für $a > 1$ kommt es zu einer Streckung, für $0 < a < 1$ zu einer Stauchung.
Die Funktion f: $\mathbf{y = a \cdot b^x}$ kann auch in der Form $\mathbf{y = a \cdot e^{\lambda x}}$ dargestellt werden. Der Parameter λ bestimmt, ob die Funktion steigt oder fällt, und zwar gilt: Für $\lambda > 0$ ist der Graph monoton steigend und für $\lambda < 0$ ist der Graph monoton fallend. Der Wert von a bestimmt, ob der Graph gegenüber der Funktion $\mathbf{y = e^x}$ gestreckt oder gestaucht wird.

Funktionsgraphen von $y = a \cdot 5^x$ für $a = 4; 1; 0,25$	Eigenschaften
	Sämtliche Funktionswerte sind positiv, die Graphen liegen oberhalb der x-Achse und sind positiv gekrümmt, es gibt keine Nullstellen und keine Extremwerte, die Graphen gehen durch den Punkt $(0 \vert a)$. Die x–Achse ist Asymptote und die Graphen sind streng monoton wachsend.

Aufgabe 02: Gegeben sind zwei Graphen von Exponentialfunktionen. Welche der folgenden Funktionsterme beschreiben die Graphen? Begründe die Auswahl!
(1) $f_1(x) = 2 \cdot 1,2^x$, (2) $f_2(x) = 4 \cdot 0,6^x$, (3) $f_3(x) = 5 \cdot 0,8^x$, (4) $f_4(x) = 4 \cdot 1,5^x$, (5) $f_5(x) = 3 \cdot 1,4^x$

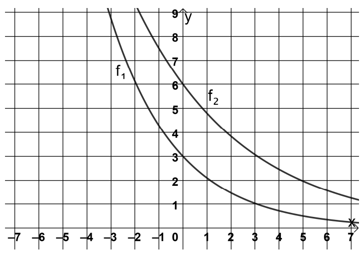




Der Graph ist streng monoton fallend, daher kommen nur die Basen 0,6 und 0,8 in Frage.
Da der Graph die y-Achse im Punkt $(0 \vert 4)$ schneidet, ist (2) $f_2(x) = 4 \cdot 0,6^x$ der gesuchte Funktionsterm.

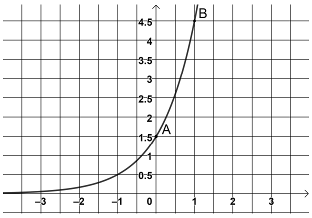
Der Graph ist streng monoton wachsend, daher kommen nur die Basen 1,2; 1,4 oder 1,5 in Frage.
Da der Graph die y-Achse im Punkt $(0 \vert 3)$ schneidet, ist (5) $f_5(x) = 3 \cdot 1,4^x$ der gesuchte Funktionsterm.

Aufgabe 03: Die unten stehende Zeichnung enthält zwei Exponentialfunktionen mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = a_1 \cdot b_1^x$ und $f_2(x) = a_2 \cdot b_2^x$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Begründe die Auswahl!
(1) $a_1 < a_2$ und $b_1 = b_2$, (2) $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$, (3) $a_1 < a_2$ und $b_1 > b_2$, (4) $a_1 > a_2$ und $b_1 < b_2$.



Es gilt (3) $a_1 < a_2$ und $b_1 > b_2$
Begründung:
$a_1 < a_2$, weil $f_1(0) = 3 < f_2(0) = 6$ ist.
$b_1 > b_2$, weil f_1 steiler verläuft als f_2.

Aufgabe 04: Lies die zu den Punkten A und B gehörigen Wertepaare aus dem unten dargestellten Funktionsgraphen ab und ermittle die Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion.



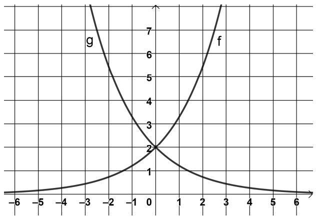
$A(0|1{,}5)$, $B(1|4{,}5)$ in die allgemeine Funktionsgleichung

$y = a \cdot b^x$ eingesetzt ergibt:

$1{,}5 = a \cdot \underbrace{b^0}_{1} \Rightarrow a = 1{,}5$

$4{,}5 = 1{,}5 \cdot b^1 = 1{,}5 \cdot b \Rightarrow b = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3$ Damit: $y = 1{,}5 \cdot 3^x$

Aufgabe 05: Wie lauten die Funktionsgleichungen der natürlichen e-Funktionen mit $|\lambda| = 0{,}5$?



Allgemein gilt: $y = a \cdot e^{\lambda x}$

Zur Berechnung von a wird der Punkt $P(0|2)$ eingesetzt (der Punkt liegt auf beiden Kurven).

$2 = a \cdot e^{\lambda \cdot 0} = a \cdot \underbrace{e^0}_{=1} = a$

Damit: $f(x) = 2 \cdot e^{0{,}5x}$ und $g(x) = 2 \cdot e^{-0{,}5x}$

Eine charakteristische Eigenschaft der Exponentialfunktion

$\mathbf{f(x+1) = b \cdot f(x)}$ bzw. $\mathbf{\frac{f(x+1)}{f(x)} = b.}$ Allgemein gilt: $\mathbf{f(x+h) = b^h \cdot f(x)}$ bzw. $\mathbf{\frac{f(x+h)}{f(x)} = b^h.}$

Die Exponentialfunktion hat also die besondere Eigenschaft, dass sie sich in bestimmten gleichen „Abständen" immer um denselben Faktor vermehrt (wenn b>1) oder vermindert (wenn 0<b<1). Das ist der Grund, warum sich die Exponentialfunktion zur Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen eignet.

Aufgabe 06: Gegeben sei die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$. Leite obige Beziehungen her.

$f(x+1) = a \cdot b^{x+1} = a \cdot b^x \cdot b^1 = b \cdot \underbrace{a \cdot b^x}_{f(x)} = b \cdot f(x)$; $f(x+h) = a \cdot b^{x+h} = a \cdot b^x \cdot b^h = b^h \cdot \underbrace{a \cdot b^x}_{f(x)} = b^h \cdot f(x)$

Aufgabe 07: Welche der beschriebenen Zusammenhänge können durch eine Exponentialfunktion modelliert werden?

a) Veranlagung eines Kapitals: Es werden die Zinsen am Ende eines Jahres zum Kapital geschlagen und im nächsten Jahr mitverzinst.
b) Freier Fall: In der 1, 2, 3,...- fachen Zeit wird der 1, 4, 9,...-fache Weg zurückgelegt.
c) Reparaturrücklage: Pro Monat werden 5% des konstanten Hauhaltseinkommens für eventuelle Reparaturen weggelegt.
d) Roulette: Ein Spieler setzt auf rouge (=rot) und verdoppelt den anfänglichen Spieleinsatz E(0) solange, bis noir (=schwarz) kommt. Gib eine Formel für E(9) an, das ist jener Betrag, den der Spieler beim zehnten Spiel einzusetzen hat. Ist das Spiel attraktiv?

a) Exponentielles Wachstum, weil das Kapital jährlich um denselben Faktor (=Prozentsatz) steigt.
b) Der Weg steigt mit dem Quadrat der Zeit, dies kann mit einer quadratischen Funktion modelliert werden.
c) Es wird pro Monat immer derselbe konstante Betrag weggelegt, dies kann durch eine lineare Funktion modelliert werden.
d) Der Einsatz wächst exponentiell, weil er bei jedem Spiel mit demselben Faktor 2 multipliziert wird.
$E(9) = E(0) \cdot 2^9 = 512 \cdot E(0)$. Das Spiel ist *nicht* attraktiv, weil man höchstens den 1. Einsatz E(0) gewinnen kann. Außerdem braucht man viel Spielkapital, um ausreichend oft verdoppeln zu können und der von vielen Casinos festgesetzte Höchsteinsatz darf nicht überschritten werden.

Anwendungen der Exponentialfunktion

Aufgabe 08: Bei einem organischen Wachstumsprozess nimmt die Masse eines beliebigen Organismus pro Tag um 35 % zu.

a) Stelle das Wachstum durch die Formeln (1) $m_t = m_0 \cdot a^t$ und (2) $m_t = m_0 \cdot e^{\lambda t}$ dar.
b) Berechne die **Verdopplungszeit**, das ist jene Zeit, in der eine vorhandene Menge auf das Doppelte anwächst.
c) Wann ist die 50-fache Anfangsmasse erreicht?
d) Zeichne ein Schaubild. Wähle als Zeiteinheit die Verdopplungszeit.

Die folgenden Gleichungen sind nach dem Exponenten aufzulösen. Dazu müssen die Gleichungen logarithmiert werden. Folgende **logarithmische Rechenregeln** finden dabei Anwendung:

$\boxed{\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v}$ $\boxed{\ln(\frac{u}{v}) = \ln u - \ln v}$ $\boxed{\ln u^n = n \cdot \ln u}$ $\boxed{\ln e^n = n, \text{weil } \ln e = 1 \text{ ist.}}$

a) (1) $m_t = m_0 \cdot 1{,}35^t$

(2) $1{,}35^t = e^{\lambda t}$

$$1{,}35 = e^{\lambda}$$
$$\ln 1{,}35 = \lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}$$
$$\lambda \approx 0{,}300 \Rightarrow m_t = m_0 \cdot e^{0{,}300t}$$

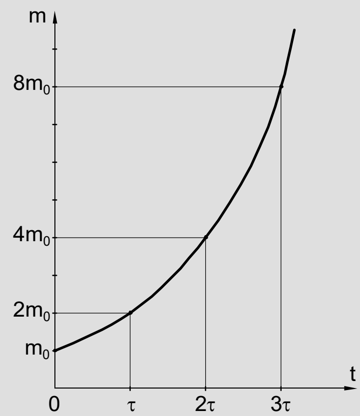
b) $2m_0 = m_0 \cdot e^{0{,}300\tau}$

$$2 = e^{0{,}300\tau}$$
$$\ln 2 = 0{,}300\tau$$
$$\tau = \frac{\ln 2}{0{,}300} \approx 2{,}31 \text{ Tage}$$

c) $50 \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{0{,}300t}$

$$50 = e^{0{,}300t}$$
$$\ln 50 = 0{,}300t$$
$$t = \frac{\ln 50}{0{,}300} \approx 13 \text{ Tage}$$

d)



Aufgabe 09: Beim radioaktiven Zerfall von Wismut beträgt die **Halbwertszeit** 5,0 Tage, das ist jene Zeit, in der von einer vorhandenen Menge die Hälfte zerfällt.

a) Ermittle die Zerfallskonstante λ. Wie lautet das Zerfallsgesetz?
b) Berechne aus dem Zerfallsgesetz die Wismutmengen nach 2, 4, 6, 8, 10, 12 Tagen, wenn ursprünglich 60 g vorhanden waren.
c) Zeichne ein Schaubild und lies daraus die Halbwertszeit ab.
d) Nach wie viel Tagen sind nur mehr 2 g Wismut vorhanden?

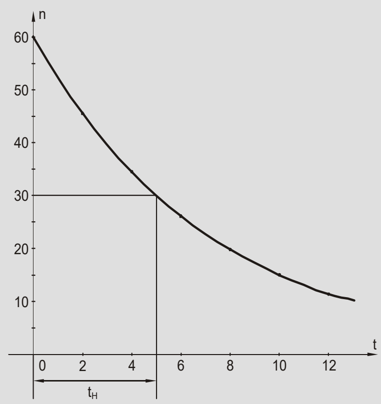
a)

$$\frac{n_0}{2} = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-5\lambda}$$
$$\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2 = -5\lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{5} = 0{,}13863 \quad \text{Zerfallskonstante}$$
$$n_t = n_0 \cdot e^{-0{,}13863 \cdot t} \quad \text{Zerfallsgesetz}$$

b)

t	n
2	45,5
4	34,5
6	26,1
8	19,8
10	15,0
12	11,4

c)



$t_H = 5$

d)

$$2 = 60 \cdot e^{-0{,}13863 \cdot t}$$
$$\frac{1}{30} = e^{-0{,}13863 \cdot t}$$
$$-\ln 30 = -0{,}13863 \cdot t$$
$$t = \frac{\ln 30}{0{,}13863} \approx 24{,}5 \text{ Tage}$$