Eigenschaften reeller Funktionen

Monotone Funktionen

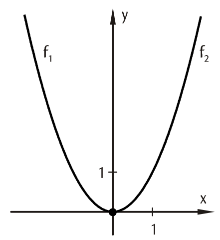
Eine reelle **Funktion** f heißt

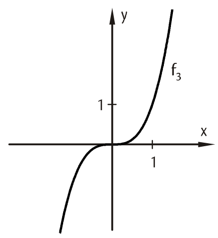
streng monoton wachsend, wenn gilt:
$\forall\, x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
(„*größeren* Argumenten sind *größere* Funktionswerte zugeordnet“)
monoton wachsend, wenn gilt:
$\forall\, x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

streng monoton fallend, wenn gilt:
$\forall\, x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
(„*größeren* Argumenten sind *kleinere* Funktionswerte zugeordnet“)
monoton fallend, wenn gilt:
$\forall\, x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

(streng) monoton, wenn sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: **(1)** $f_1 : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R},\ y = x^2$: streng monoton fallend
(2) $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ y = x^2$: streng monoton wachsend
(3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = x^3$: streng monoton wachsend





Beschränkte Funktionen

Eine reelle **Funktion** f heißt

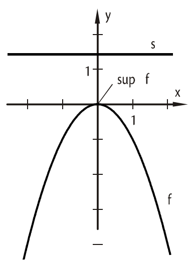
nach oben beschränkt, wenn ihre Wertemenge W_f nach oben beschränkt ist:
$\forall\, x \in D_f$: $f(x) \leqslant s$; $s \in \mathbb{R}$.
s heißt *obere Schranke* von f.
sup W_f ist die *kleinste* und heißt **Supremum** von f.

nach unten beschränkt, wenn ihre Wertemenge W_f nach unten beschränkt ist:
$\forall\, x \in D_f$: $f(x) \geqslant t$; $t \in \mathbb{R}$.
t heißt *untere Schranke* von f.
inf W_f ist die *größte* und heißt **Infimum** von f.

beschränkt, wenn f nach oben und nach unten beschränkt ist:
$\forall\, x \in D_f$: $t \leqslant f(x) \leqslant s$; $t, s \in \mathbb{R}$.
t und s sind die *Schranken* von f.

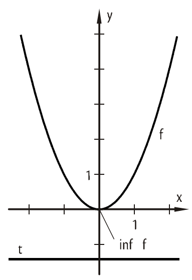
Beispiele:

$f: y = -x^2$



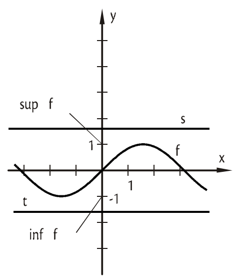
Der Graph von f verläuft unterhalb einer Parallelen zur x-Achse.

$f: y = x^2$



Der Graph von f verläuft oberhalb einer Parallelen zur x-Achse.

$f: y = \sin x$

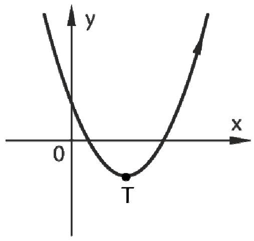


Der Graph von f verläuft in einem Streifen parallel zur x-Achse.

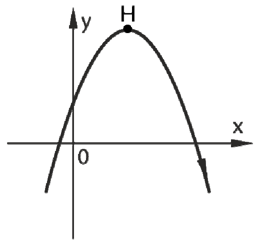
Minimum und Maximum einer Funktion

Der *größte* bzw. *kleinste* Wert der Wertemenge W_f einer über einer abgeschlossenen Definitionsmenge D_f definierten Funktion heißt **Maximum** bzw. **Minimum** von f.
Diese Werte können innerhalb (relatives oder lokales Maximum bzw. Minimum) oder am Rand (Randmaximum bzw. Randminimum) der Definitionsmenge liegen.
Lokale Extremstellen: Hochpunkte oder Tiefpunkte. Dort ändert sich die Art der Monotonie.

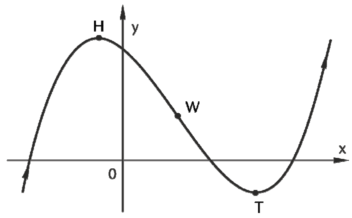
Krümmungsverhalten, Wendepunkt
Die Krümmung beschreibt den Verlauf einer Kurve. Es gibt zwei Arten der Krümmung, je nachdem ob die Kurve beim Durchfahren von links nach rechts eine Linkskurve oder eine Rechtskurve darstellt.
Im Wendepunkt ändert sich der Krümmungssinn.



Linkskurve, positiv gekrümmt (konkav)

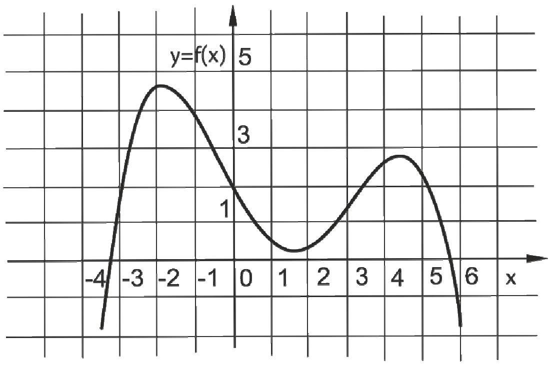


Rechtskurve, negativ gekrümmt (konvex)



Im Wendepunkt W wechselt die Krümmung das Vorzeichen

Aufgabe 10: Das folgende Diagramm stellt eine Polynomfunktion dar. Beantworte folgende Fragen.



a) Gib Intervalle an, in denen die Funktion sicher monoton steigend/fallend ist.
b) Gibt es Schranken der Funktion?
c) In welche Intervalle fallen Hochpunkte bzw. Tiefpunkte?
d) In welchen Intervallen gibt es sicher eine positive/negative Krümmung?
e) Gibt es Wendepunkte? Wenn ja, gib Intervalle an, in denen sie sicher liegen.

a) sicher (streng) monoton steigend in den Intervallen $[-4;-2]$ und $[2;4]$,
sicher (streng) monoton fallend in den Intervallen $[-1;+1]$ und $[5;6]$.
b) $s=5$ ist eine obere Schranke, eine untere Schranke existiert nicht.
c) Es gibt zwei Hochpunkte, der eine liegt im Intervall $[-2{,}5;-1{,}5]$, der andere im Intervall $[4;5]$.
Es gibt einen Tiefpunkt im Intervall $[1;2]$.
d) sicher positiv gekrümmt im Intervall $[0;2{,}5]$,
sicher negativ gekrümmt in den Intervallen $[-4;-1]$ und $[3{,}5;6]$
e) Es gibt zwei Wendepunkte, der eine liegt im Intervall $[-1;1]$, der andere im Intervall $[2{,}5;4]$.

Aufgabe 11: Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt im Punkt $H(-2|3)$ einen Hochpunkt, im Punkt $T(4|-1)$ einen Tiefpunkt und im Punkt $W(1|1)$ einen Wendepunkt.
a) In welchem Intervall ist die Funktion positiv (links) gekrümmt?
b) In welchem Intervall ist die Funktion negativ (rechts) gekrümmt?
c) In welchem Intervall ist die Funktion (streng) monoton fallend?
d) In welchen Intervallen ist die Funktion (streng) monoton steigend?

a) Im Intervall $[1;\infty]$
b) Im Intervall $[-\infty;1]$
c) Im Intervall $[-2;4]$
d) In den Intervallen $[-\infty;-2]$ und $[4;\infty]$

Achsensymmetrie

Eine Funktion ist **symmetrisch zur y-Achse**, wenn gilt: $\boxed{f(-x)=f(x)}$

Entgegengesetzte Argumente haben also gleiche Funktionswerte.

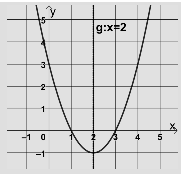
Beispiel: Potenzfunktionen geraden Grades $f(x)=x^2, f(x)=x^4, \ldots$ sind symmetrisch zur y-Achse.

Eine Funktion ist **symmetrisch bezüglich einer Geraden $\mathbf{g: x = a}$**, wenn gilt: $\boxed{f(a-x)=f(a+x)}$

Aufgabe 12: Zeige, dass die Funktion $f(x)=x^2-4x+3$ symmetrisch bezüglich der Geraden g: x=2 ist.

Zu zeigen ist, dass $f(2-x)=f(2+x)$ eine wahre Aussage ist.

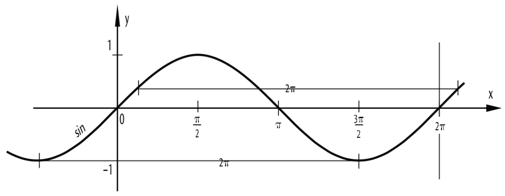
$$(2-x)^2-4(2-x)+3=(2+x)^2-4(2+x)+3$$
$$4-4x+x^2-8+4x+3=4+4x+x^2-8-4x+3$$
$$x^2-5=x^2-5 \quad \text{wahre Aussage!}$$

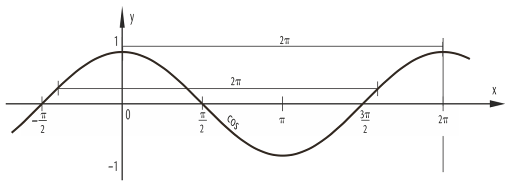


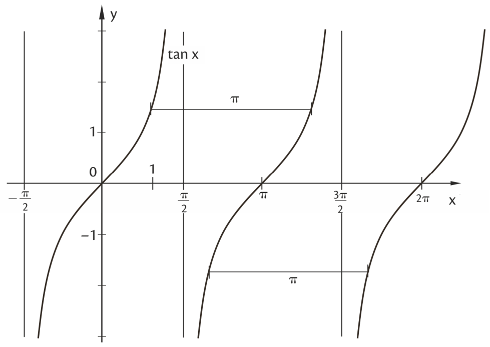
Periodizität

Eine Funktion f heißt **periodisch mit der Periode p**, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $\boxed{f(x+p)=f(x)}$, d.h. die y-Werte wiederholen sich jeweils nach p Einheiten.

Beispiel: Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen. Sinus- und Cosinusfunktion haben die (kleinste)Periode $p=2\pi$, die Tangensfunktion hat die (kleinste)Periode $p=\pi$.







Aufgabe 13: Ermittle die (kleinste) Periode folgender Funktionen:

a) $f(x)=\sin(2x)$ **b)** $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ **c)** $f(x)=\tan(3x)$

a) Es gilt: $\sin 2x=\sin(2x+2\pi)$, da der Sinus die Periode 2π hat.

Setzt man links statt x den Ausdruck (x+p) ein, lässt sich p berechnen.

$2(x+p)=2x+2\pi \Leftrightarrow 2x+2p=2x+2\pi \Rightarrow p=\pi$

b) Es gilt: $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$, da der Cosinus die Periode 2π hat.

Setzt man links statt x den Ausdruck (x+p) ein, lässt sich p berechnen.

$\frac{x+p}{2}=\frac{x}{2}+2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{p}{2}=\frac{x}{2}+2\pi \Rightarrow p=4\pi$

c) Es gilt: $\tan 3x=\tan(3x+\pi)$, da der Tangens die Periode π hat.

Setzt man links statt x den Ausdruck (x+p) ein, lässt sich p berechnen.

$3(x+p)=3x+\pi \Leftrightarrow 3x+3p=3x+\pi \Rightarrow p=\frac{\pi}{3}$

Aufgabe 14: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x + c)$. Der Summand c bewirkt eine Verschiebung der Sinusfunktion entlang der x-Achse um c. Zeige, dass sich das nicht auf die Periodizität auswirkt.

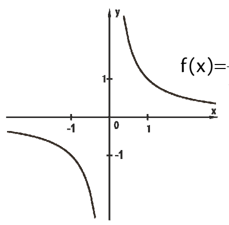
Es gilt: $\sin(x+c) = \sin(x+c+2\pi)$, da der Sinus die Periode 2π hat.
Setzt man links statt x den Ausdruck (x+p) ein, lässt sich p berechnen.
$x+p+c = x+c+2\pi \Leftrightarrow p = 2\pi$, die Periode bleibt also gleich!

Asymptotisches Verhalten

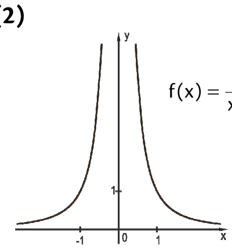
Wenn sich der Graph einer Funktion einer Geraden immer mehr annähert, ohne sie zu schneiden, dann nennt man diese Gerade eine **Asymptote**. Je nach ihrer Lage unterscheidet man zwischen waagrechten, senkrechten und schiefen Asymptoten. In diesem Zusammenhang wird der Verlauf von Funktionen für große oder kleine Werte von x untersucht, oder man interessiert sich für Unendlichkeitsstellen (= Stellen, an denen der Funktionswert unendlich groß wird).

Beispiele:

(1)



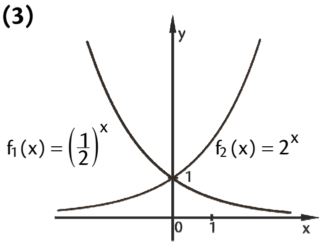
(2)



Die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote, weil für größer/kleiner werdende Argumente der Funktionswert nach Null strebt.
In Symbolen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

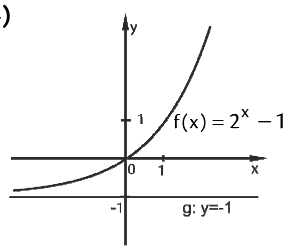
Die y-Achse ist eine senkrechte Asymptote, weil die Funktionswerte immer größer werden, wenn sich x der Zahl Null nähert.
In Symbolen: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

(3)



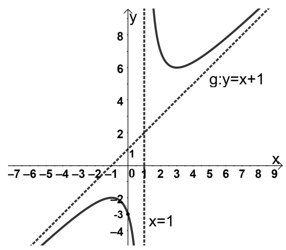
Die x-Achse ist eine waagrechte Asymptote.

(4)



Die Gerade $g: y = -1$ ist eine waagrechte Asymptote.

(5)



Die Gerade x=1 ist eine senkrechte Asymptote.
Die Gerade g: y=x+1 ist eine schiefe Asymptote.

Aufgabe 15: Untersuche das asymptotische Verhalten folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{6}{x-2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - 4$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{0{,}5^x}$

a) $f(x) = \dfrac{6}{x-2} \to 0$ für $x \to \infty$, daher ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote.

$f(x) = \dfrac{6}{x-2} \to \infty$ für $x \to 2$, daher ist die Gerade $g: x = 2$ eine senkrechte Asymptote.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - 4 \to -4$ für $x \to \infty$, daher ist die Gerade $g: y = -4$ eine waagrechte Asymptote.

$f(x) = \dfrac{2}{x^2} - 4 \to \infty$ für $x \to 0$, daher ist die y-Achse eine senkrechte Asymptote.

c) $f(x) = \dfrac{1}{0{,}5^x} = \left(\dfrac{1}{0{,}5}\right)^x = 2^x$ hat gemäß Skizze (3) die x-Achse als waagrechte Asymptote.