Geradengleichungen

1) Parameterdarstellungen einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Punkt–Richtungsform		Zwei–Punkt–Form
Vektorschreibweise: $X = P + t \cdot \vec{a},\ t \in \mathbb{R}$	Koordinatenschreibweise: in $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x = x_p + ta_x \\ y = y_p + ta_y \end{cases}$ in $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} x = x_p + ta_x \\ y = y_p + ta_y \\ z = z_p + ta_z \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	$X = P + t \cdot \overrightarrow{PQ},\ t \in \mathbb{R}$
X ... variabler Punkt auf g, P, Q ... feste Punkte auf g, $\vec{a}, \overrightarrow{PQ}$ ... Richtungsvektoren von g, t ... Parameter		

Aufgabe 16: Ermittle die Gleichung einer Geraden, von der ein Punkt und ein Richtungsvektor gegeben sind.

$P(-5|-1),\ \vec{a} = (2|5)$

Vektorschreibweise: $g: X = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Koordinatenschreibweise: $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = -1 + 5t \end{cases}\quad t \in \mathbb{R}$

$P(-1|-1|1),\ \vec{a} = (0|4|-3)$

Vektorschreibweise: $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Koordinatenschreibweise: $\begin{cases} x = -1 + 0t \\ y = -1 + 4t \\ z = \ \ 1 - 3t \end{cases}\quad t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 17: Ermittle die Gleichung einer Geraden, von der zwei Punkte gegeben sind.

$P(-5|2),\ Q(-1|9)$

Ein Richtungsvektor von g ist $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (4|7)$ und ein Punkt von g ist P.

$g: X = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = \ \ 2 + 7t \end{cases}\quad t \in \mathbb{R}$

$P(-3|-1|1),\ Q(-1|-13|10)$

Ein Richtungsvektor von g ist $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = (2|-12|9)$ und ein Punkt von g ist P.

$g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 - 12t \\ z = \ \ 1 + 9t \end{cases}\quad t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 18: Ermittle **(1)** die fehlende Koordinate des auf der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ liegenden Punktes $P(-3/y)$ und überprüfe **(2)** rechnerisch, ob der Punkt $Q(1/-5)$ auf dieser Geraden liegt.

Zur Lösung dieser Aufgabe wird das **Inzidenzkriterium** verwendet: Ein Punkt liegt genau dann auf einer bestimmten Geraden, wenn seine Koordinaten die zugehörige Geradengleichung erfüllen.

(1) Punkt P in die gegebene Geradengleichung statt X einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

I. $-3 = -2 + t$
II. $y = 3 - 4t$

I. $t = -1$
II. $y = 3 + 4 = 7 \Rightarrow P(-3/7)$

(2) Punkt Q in die gegebene Geradengleichung statt X einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

I. $1 = -2 + t \Rightarrow t = 3$
II. $-5 = 3 - 4t \Rightarrow 4t = 8 \Rightarrow t = 2$

Verschiedene Werte für t $\Rightarrow Q \notin g$

2) Geradengleichung in Normalvektorform (NVF) im $\mathbb{R}^2$	
Vektorschreibweise	**Koordinatenschreibweise**
$\vec{n}\cdot(X-P)=0$ bzw. $\vec{n}\cdot X=\vec{n}\cdot P$	$n_x\cdot x+n_y\cdot y=c_1$ mit $c_1=n_x\cdot p_x+n_y\cdot p_y$

Aufgabe 19: Ermittle die Gleichung einer Geraden in NVF, von der ein Punkt $P(-5|-1)$ und ein Normalvektor $\vec{n}=(-5|2)$ gegeben sind.

$$g:\ \vec{n}\cdot X=\vec{n}\cdot P:\quad \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot X=\underbrace{\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}}_{25-2=23\ \text{(skalares Produkt)}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot X=23\ \text{ oder }\ -5x+2y=23$$

Aufgabe 20: Ermittle die Gleichung einer Geraden in NVF, von der zwei Punkte $P(-5|2)$ und $Q(-1|9)$ gegeben sind.

Richtungsvektor $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}=(4|7)$, Normalvektor $\vec{n}=\vec{a}'=\overrightarrow{PQ}=(-7|4)$, (Kippregel anwenden!).

Damit: $g:\ \vec{n}\cdot X=\vec{n}\cdot P:\ \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\cdot X=43$ oder $-7x+4y=43$

Aufgabe 21: Berechne aus einer Parameterdarstellung $g:X=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ eine Normalvektorform von g.

Lösungsweg 1:
Elimination des Parameters aus der Koordinatenschreibweise der Parameterdarstellung.

$$g:X=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x&=-5+2t &&|\cdot 5\\ y&=-1+5t &&|\cdot(-2)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 5x&=-25+10t\\ -2y&=\ \ +2-10t\end{aligned}\right\rangle +$$

$$g:5x-2y=-23\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}X=-23$$

Lösungsweg 2:
Verwende die Normalvektorform: $\vec{n}\cdot X=\vec{n}\cdot P$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}=\vec{a}'=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$$

$P(-5|-1)$: $\vec{n}\cdot P=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}=25-2=23$

$$g:\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}X=23\Leftrightarrow-5x+2y=23$$
$$\Leftrightarrow 5x-2y=-23$$

Aufgabe 22: Berechne aus einer Normalvektorform $g:\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}X=-23$ eine Parameterdarstellung von g.

Normalvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, Richtungsvektor $\vec{a}=\vec{n}'=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, (Kippregel anwenden!).

Berechnung eines Punktes P: Man wählt eine Koordinate des Punkts P und ermittelt durch Einsetzen dieser Koordinate in die gegebene Gleichung von g die zweite Koordinate von P.

z.B.: $x=1$: $g:\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}=-23\Leftrightarrow 5\cdot1-2y=-23\ \Rightarrow y=14$, also $P(1|14)$

Nun werden die Werte von $\vec{a}$ und P in die Parameterdarstellung eingesetzt:

$$g: X=P+t\vec{a}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1\\14\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

3) Implizite und explizite Darstellung vektorfreier Geradengleichungen

Aus der Koordinatenschreibweise der Normalvektorform ergibt sich:

$n_x \cdot x + n_y \cdot y = c_1 \Leftrightarrow \mathbf{ax + by + c = 0}$ $(n_x = a, n_y = b, c_1 = -c)$ **implizite Darstellung** oder **allgemeine Geradengleichung**

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y = c_1 \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{n_x}{n_y} \cdot x + \frac{c_1}{n_y} \quad \text{mit } n_y \neq 0$$

explizite Darstellung oder **Hauptform**

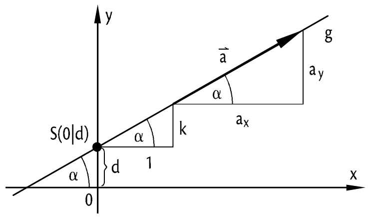
$$\mathbf{y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anstieg}}}{k \cdot x} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Abschnitt auf der y-Achse}}}{d}}$$

Der **Anstieg k** kann aus den Koordinaten eines Richtungsvektors oder Normalvektors der Geraden berechnet werden.

Es gilt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow k = \frac{a_y}{a_x}$ (Siehe nebenstehende Zeichnung!)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -\frac{n_x}{n_y}$$

Ferner gilt: $k = \tan\alpha$, $\alpha \ldots$ Steigungswinkel



Aufgabe 23: Ermittle eine Gleichung der Geraden g, die

a) durch den Punkt P(−3|4) geht und den Anstieg $k = \frac{5}{2}$ hat,

b) durch den Punkt Q(−1|9) geht und parallel zu $g_1: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ verläuft,

c) durch den Punkt R(−5|−1) geht und normal auf g_2: $2x + 5y = 14$ steht.

Parameterdarstellung: $X = P + t \cdot \vec{a}$	Normalvektorform: $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$
a) P(−3|4) $k = \frac{5}{2}$: $k = \frac{a_y}{a_x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $g: X = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	P(−3|4) $k = \frac{5}{2}$: $k = -\frac{n_x}{n_y} = \frac{5}{2} \Rightarrow \vec{n}_g = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_g \cdot P = 23$ $g: \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} X = 23$ oder $-5x + 2y = 23$
b) Q(−1|9) $\Rightarrow$ P = Q(−1|9) $g \parallel g_1$: dh.: $\begin{cases} \vec{n}_{g_1} = \vec{n}_g \\ \vec{a}_{g_1} = \vec{a}_g \end{cases}$ $\vec{a}_{g_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{a}_g$ $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	Q(−1|9) $\Rightarrow$ P = Q(−1|9) $g \parallel g_1$: dh.: $\begin{cases} \vec{n}_{g_1} = \vec{n}_g \\ \vec{a}_{g_1} = \vec{a}_g \end{cases}$ $\vec{a}_{g_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_g = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_g \cdot P = 23$ $g: \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} X = 23$ oder $-5x + 2y = 23$
c) R(−5|−1) $\Rightarrow$ P = R(−5|−1) $g \perp g_2$: dh.: $\begin{cases} \vec{n}_{g2} = \vec{a}_g \\ \vec{a}_{g2} = \vec{n}_g \end{cases}$ $\vec{n}_{g2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{a}_g$ $g: X = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	R(−5|−1) $\Rightarrow$ P = R(−5|−1) $g \perp g_2$: dh.: $\begin{cases} \vec{n}_{g2} = \vec{a}_g \\ \vec{a}_{g2} = \vec{n}_g \end{cases}$ $\vec{n}_{g2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_g = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_g \cdot P = 23$ $g: \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} X = 23$ oder $-5x + 2y = 23$