Quadratische Gleichungen (Gleichungen zweiten Grades)

Rein quadratische Gleichung: $\mathbf{ax^2 + c = 0}$, $a \neq 0, c \in \mathbb{R}$ lässt sich auf die Form $\mathbf{x^2 = q} = -\frac{c}{a}$ bringen.

In der Menge $\mathbb{R}$ gibt es **drei Lösungsfälle**:

Für $q > 0$ gibt es *zwei reelle* Lösungen $L = \left\{+\sqrt{q}, -\sqrt{q}\right\}$; für $q = 0$ ist $L = \{0\}$; Für $q < 0$ ist $L = \{\ \}$.

Quadratische Gleichungen ohne konstantes Glied

$\mathbf{ax^2 + bx = 0}$; $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ — $\mathbf{x^2 + px = 0}$; $p \neq 0$

Sie besitzen stets *zwei verschiedene reelle* Lösungen. Man erhält sie, indem man x heraushebt und die so erhaltenen Faktoren gleich null setzt.

$\mathbf{x(ax + b) = 0; x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}}$ — $\mathbf{x(x + p) = 0; x_1 = 0, x_2 = -p}$

Allgemeine quadratische Gleichung

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$; $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$

Normalform der quadratischen Gleichung

$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$; $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$

Lösungsformeln

$$\mathbf{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ „Große Lösungsformel"

$$\mathbf{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$ „Kleine Lösungsformel"

Diskriminante

$$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$$

$$\mathbf{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für $\mathbf{D > 0}$ gibt es zwei reelle Lösungen, für **D=0** eine reelle Lösung und für **D<0** keine reelle Lösung.

Graphisches Lösen quadratischer Gleichungen:

Beim graphischen Lösen einer quadratischen Gleichung zeichnet man den Graphen der zugehörigen quadratischen Funktion $f: y = ax^2 + bx + c$. Dieser ist eine Parabel. Je nach Lage dieser Parabel gibt es zwei, genau eine oder keine Nullstelle. Die Lösungen stimmen mit den Nullstellen überein.

Aufgabe 14: Ermittle die Lösungen der Gleichung $4x^2 - 25 = 0$ in $\mathbb{R}$.

$$4x^2 - 25 = 0 \quad | +25$$
$$4x^2 = 25 \quad | :4$$
$$x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2} = \pm 2{,}5$$
$$x_1 = 2{,}5;\ x_2 = -2{,}5$$

Aufgabe 15: Ermittle die Lösungen der Gleichung $7x^2 + 21x = 0$ in $\mathbb{R}$.

$$7x^2 + 21x = 0 \quad | \text{ x herausheben}$$
$$x \cdot (7x + 21) = 0 \quad | \text{ Faktoren = 0 setzen}$$
$$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$7x + 21 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$$

Aufgabe 16: Ermittle die Lösungen der Gleichung $2x^2 - 5x - 3 = 0$ in $\mathbb{R}$.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} \quad | \text{ Große Lösungsformel anwenden!}$$
$$x_1 = \frac{12}{4} = 3;\ x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

Aufgabe 17: Löse in $\mathbb{R}$: $x^2 + x - 6 = 0$ **(1)** rechnerisch und **(2)** graphisch.

Der Vergleich mit der Normalform $x^2 + px + q = 0$ ergibt $p = 1$ und $q = -6$.

Diese Werte werden in die „Kleine Lösungsformel" eingesetzt.

(1) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)}$

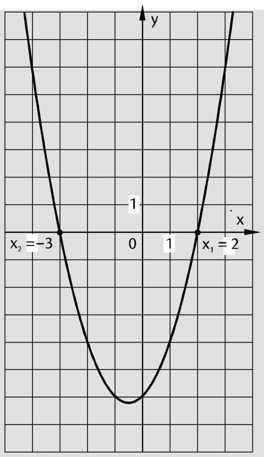
$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$

(2) Wertetabelle, Graph

x	y
−5	14
−4	6
−3	0
−2	−4
−1	−6
0	−6
1	−4
2	0
3	6
4	14



Aufgabe 18: Gegeben ist die quadratische Gleichung $2x^2 + 4x + c = 0$.
Ermittle jene Werte von c, für die sich zwei reelle Lösungen, eine reelle Lösung, keine reelle Lösung ergibt.

$2x^2 + 4x + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8c}}{4}$ Diskriminante $D = 16 - 8c$

Für $16 - 8c > 0$, also $c < 2$ ergeben sich zwei reelle Lösungen.

Für $16 - 8c = 0$, also $c = 2$ ergibt sich eine reelle Lösung (Doppellösung).

Für $16 - 8c < 0$, also $c > 2$ gibt es keine reellen Lösungen.

Aussagen über quadratische Gleichungen: Die folgenden Beispiele machen Aussagen über quadratische Gleichungen. Überprüfe den Wahrheitsgehalt und begründe die getroffene Entscheidung.

Aufgabe 19: Die Gleichung $x^2 - \frac{x}{4} = 0$ hat in der Grundmenge der ganzen Zahlen zwei Lösungen.

Die Aussage ist **falsch**, weil zwar die 1.Lösung $x = 0$ eine ganze Zahl ist. Die zweite Lösung ist $\frac{1}{4}$, und das ist keine ganze Zahl.

Aufgabe 20: Die Gleichung $x^2 + px + 2 = 0$ hat für $p = -3$ zwei ganzzahlige Lösungen.

$x^2 + px + 2 = 0$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2}$

Für $p = -3$ ergibt sich $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$.

$x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ sind ganze Zahlen, die Aussage ist also **wahr**.

Aufgabe 21: Die Gleichung $ax^2 - 3x + 2 = 0$ hat für $a = -2$ genau eine reelle Lösung.

$-2x^2 - 3x + 2 = 0 \ |\cdot(-1)$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$, also $x_1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ und $x_2 = -2 \in \mathbb{R}$.

Die Aussage ist **falsch**, weil es zwei reelle Lösungen gibt.