Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen die Variable im Exponenten einer Potenz vorkommt. Hier wird der Sonderfall behandelt, dass die Variable *nur* im Exponenten und als ganz rationaler Term auftritt.
Die Definitionsmenge dieser Gleichungen ist $D=\mathbb{R}$.

Exponentialgleichungen, die sich ohne Logarithmieren lösen lassen

Die Gleichung kann auf die **Form** $\mathbf{a^{f(x)}=a^{g(x)}}$ gebracht werden.
Man erhält dann die Lösungen, indem man die Gleichung $f(x)=g(x)$ löst.

Gegeben sind Exponentialgleichungen vom **Typ:** $\mathbf{a\cdot b^{cx+d}+e\cdot b^{fx+g}=h\cdot b^{mx+n}}$ mit der Basis $\mathbf{b=2}$.

Beispiel: Löse in $\mathbb{R}$: $4\cdot 2^{5x-2}-6\cdot 2^{5x-3}=2\cdot 2^{-4x-3}$

$$4\cdot 2^{5x-2}-6\cdot 2^{5x-3}=2\cdot 2^{-4x-3} \quad | \text{ Potenz mit kleinerem Exponenten herausheben}$$

$$2^{5x-3}\cdot\left(4\cdot 2^{1}-6\right)=2\cdot 2^{-4x-3}$$

$$2^{5x-3}\cdot 2=2\cdot 2^{-4x-3} \quad |:2$$

$$2^{5x-3}=2^{-4x-3} \quad | \text{ Gleichsetzen der Exponenten}$$

$$5x-3=-4x-3 \Leftrightarrow 9x=0 \Rightarrow x=0$$

Probe: $4\cdot 2^{-2}-6\cdot 2^{-3}=2\cdot 2^{-3} \Leftrightarrow \frac{4}{2^2}-\frac{6}{2^3}=\frac{2}{2^3} \Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ w.A. $\Rightarrow 0$ ist Lösung. $L=\{0\}$

Weitere Beispiele mit ganzzahligen Lösungen

(01) $6\cdot 2^{-3x+4}-2\cdot 2^{-3x+5}=4\cdot 2^{-5x+1}$ **Lösungsmenge:** $L=\{-1\}$

(02) $-2\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{x}=-3\cdot 2^{3x-3}$ **Lösungsmenge:** $L=\{2\}$

(03) $-2^{3x+7}+7\cdot 2^{3x+6}=5\cdot 2^{5x}$ **Lösungsmenge:** $L=\{3\}$

(04) $5\cdot 2^{-7x-8}-2\cdot 2^{-7x-6}=-6\cdot 2^{-6x+7}$ **Lösungsmenge:** $L=\{-16\}$

(05) $6\cdot 2^{2x-2}=3\cdot 2^{x-8}$ **Lösungsmenge:** $L=\{-7\}$

(06) $-2\cdot 2^{-2x+2}-2^{-2x+6}=-9\cdot 2^{-3x+9}$ **Lösungsmenge:** $L=\{6\}$

Weitere Beispiele mit gebrochen rationalen Lösungen

(07) $3\cdot 2^{-2x}-6\cdot 2^{-2x-3}=9\cdot 2^{-7x-8}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{6}{5}\right\}$

(08) $2\cdot 2^{-8x-2}-5\cdot 2^{-8x-3}=-2^{-2x-7}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

(09) $8\cdot 2^{-3x}+4\cdot 2^{-3x+3}=5\cdot 2^{5x+5}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

(10) $8\cdot 2^{-7x+1}+2\cdot 2^{-7x+3}=2^{x-2}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{\frac{7}{8}\right\}$

(11) $3\cdot 2^{-x+1}-4\cdot 2^{-x-1}=2^{-3x+9}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

(12) $-2\cdot 2^{-2x-5}-3\cdot 2^{-2x-4}=-2\cdot 2^{x+8}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{11}{3}\right\}$

––––– Exponentialgleichungen, die sich ohne Logarithmieren lösen lassen –––

Die Gleichung kann auf die **Form** $\mathbf{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ gebracht werden.
Man erhält dann die Lösungen, indem man die Gleichung $f(x)=g(x)$ löst.

Gegeben sind Exponentialgleichungen vom **Typ:** $\mathbf{a\cdot b^{cx+d} + e\cdot b^{fx+g} = h\cdot b^{mx+n}}$ mit der Basis $\mathbf{b = 3}$.

Beispiel: Löse in $\mathbb{R}$: $-3\cdot 3^{-8x+3}+2\cdot 3^{-8x+5}=5\cdot 3^{-7x-8}$

$$-3\cdot 3^{-8x+3}+2\cdot 3^{-8x+5}=5\cdot 3^{-7x-8} \;\Big|\; \text{Potenz mit kleinerem Exponenten herausheben}$$
$$3^{-8x+3}\cdot\left(-3+2\cdot 3^{2}\right)=5\cdot 3^{-7x-8}$$
$$3^{-8x+3}\cdot 15=5\cdot 3^{-7x-8} \;\Big|\; :5$$
$$3^{-8x+3}\cdot 3=3^{-7x-8}$$
$$3^{-8x+4}=3^{-7x-8} \;\Big|\; \text{Gleichsetzen der Exponenten}$$
$$-8x+4=-7x-8 \Rightarrow x=12$$

Probe:

$$-3\cdot 3^{-93}+2\cdot 3^{-91}=5\cdot 3^{-92} \Leftrightarrow -\frac{3}{3^{93}}+\frac{2}{3^{91}}=\frac{5}{3^{92}}\Big|\cdot 3^{93} \Leftrightarrow -3+2\cdot 3^{2}=5\cdot 3^{1} \Leftrightarrow 15=15 \text{ w.A.} \Rightarrow 12 \text{ ist Lösung.} \quad L=\{12\}$$

Weitere Beispiele mit ganzzahligen Lösungen

(13) $-9\cdot 3^{-7x-6}+4\cdot 3^{-7x-5}=3^{-8x+1}$ **Lösungsmenge:** $L=\{6\}$

(14) $-3\cdot 3^{-3x-1}=-3^{-4x-9}$ **Lösungsmenge:** $L=\{-9\}$

(15) $3\cdot 3^{7x-6}-8\cdot 3^{7x-5}=-7\cdot 3^{-7x+9}$ **Lösungsmenge:** $L=\{1\}$

(16) $-6\cdot 3^{2x+3}+3^{2x+5}=3^{3x-9}$ **Lösungsmenge:** $L=\{13\}$

(17) $9\cdot 3^{2x-2}-6\cdot 3^{2x}=-5\cdot 3^{x-7}$ **Lösungsmenge:** $L=\{-7\}$

(18) $-8\cdot 3^{-2x+4}-3\cdot 3^{-2x+3}=-3^{-x-8}$ **Lösungsmenge:** $L=\{14\}$

(19) $9\cdot 3^{7x-1}+3^{7x}=4\cdot 3^{4x-9}$ **Lösungsmenge:** $L=\{-3\}$

Weitere Beispiele mit gebrochen rationalen Lösungen

(20) $-6\cdot 3^{5x+4}-3^{5x+5}=-3^{-3x+5}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{1}{8}\right\}$

(21) $3\cdot 3^{-8x-7}+8\cdot 3^{-8x-6}=9\cdot 3^{3x+1}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{7}{11}\right\}$

(22) $4\cdot 3^{-9x-5}-3\cdot 3^{-9x-6}=3^{-4x-2}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$

(23) $-3\cdot 3^{5x-2}+4\cdot 3^{5x-1}=3^{-2x+9}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{\frac{9}{7}\right\}$

(24) $6\cdot 3^{x-1}+7\cdot 3^{x}=3\cdot 3^{-3x-2}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

(25) $-9\cdot 3^{6x-6}+8\cdot 3^{6x-5}=5\cdot 3^{x+8}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{\frac{13}{5}\right\}$

(26) $3\cdot 3^{-5x+2}-3^{-5x+5}=-8\cdot 3^{-2x-7}$ **Lösungsmenge:** $L=\left\{\frac{10}{3}\right\}$

—— Exponentialgleichungen, die sich durch Logarithmieren lösen lassen ——

Kann die Exponentialgleichung *weder* auf die **Form** $\mathbf{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ *noch* auf die **Form** $\mathbf{a^{f(x)} = b^{f(x)}}$ gebracht werden, so führt in vielen Fällen das Logarithmieren[1] der Gleichung zum Ziel. Es wird dabei die Tatsache benutzt, dass zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen gehören und umgekehrt.

Gegeben sind Exponentialgleichungen vom **Typ:** $\mathbf{a \cdot b_1^{cx+d} + e \cdot b_1^{fx+g} = h \cdot b_1^{mx+n} \cdot b_2^{ux+v}}$

Beispiel: Löse in $\mathbb{R}$: $3\cdot 2^{-3x-2} + 2\cdot 2^{-3x-4} = 2^{-x+3}\cdot 3^{-4x+2}$

$$3\cdot 2^{-3x-2} + 2\cdot 2^{-3x-4} = 2^{-x+3}\cdot 3^{-4x+2}$$

$$2^{-3x-4}\cdot\left(3\cdot 2^2 + 2\right) = 2^{-x+3}\cdot 3^{-4x+2}$$

$$\frac{14\cdot 2^{-3x-4}}{2^{-x+3}} = 3^{-4x+2}$$

$$14\cdot 2^{-2x-7} = 3^{-4x+2} \quad \Big| \text{ Gleichung logarithmieren}$$

$$\ln 14 + (-2x-7)\ln 2 = (-4x+2)\ln 3 \Leftrightarrow x(4\ln 3 - 2\ln 2) = 7\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 14$$

$$x = \frac{7\ln 2 + 2\ln 3 - \ln 14}{4\ln 3 - 2\ln 2} \approx 1.47 \qquad L = \{1.47\}$$

Die **Probe** kann mit dem Taschenrechner erfolgen. Dabei ist es zweckmäßig, mit allen am TR angezeigten Werten für x zu rechnen.

Weitere Beispiele mit den Basen $b_1 = 2$ und $b_2 = 3$

(71) $2^{3x-4} + 2^{3x-1} = 2^{2x+2}\cdot 3^{-3x+3}$ **Lösungsmenge:** $L = \{1.32\}$

(72) $4\cdot 2^{-2x}\cdot 3^{x+1} = 2^{3x-4}$ **Lösungsmenge:** $L = \{2.22\}$

(73) $5\cdot 2^{4x+1} - 4\cdot 2^{4x-5} = 4\cdot 2^{-x+3}\cdot 3^{3x+4}$ **Lösungsmenge:** $L = \{32.79\}$

(74) $-5 * 2^{-4x-2} + 2 * 2^{-4x+6} = 2^{x+1}\cdot 3^{2x+2}$ **Lösungsmenge:** $L = \{0.34\}$

(75) $2\cdot 2^{3x+5} = 3\cdot 2^{2x-2}\cdot 3^{2x+3}$ **Lösungsmenge:** $L = \{0.77\}$

(76) $3\cdot 2^{-4x-1} - 2^{-4x-3} = 4\cdot 2^{3x-1}\cdot 3^{-x-4}$ **Lösungsmenge:** $L = \{1.07\}$

(77) $2^{4x-1} - 3\cdot 2^{4x-4} = 3\cdot 2^{3x}\cdot 3^{-3x+5}$ **Lösungsmenge:** $L = \{1.94\}$

(78) $2\cdot 2^{2x-2} = 4\cdot 2^{-3x+3}\cdot 3^{2x}$ **Lösungsmenge:** $L = \{3.28\}$

Weitere Beispiele mit den Basen $b_1 = 3$ und $b_2 = 5$

(79) $8\cdot 3^{-8x+5} + 2\cdot 3^{-8x-2} = 3\cdot 3^{6x-5}\cdot 5^{x-4}$ **Lösungsmenge:** $L = \{1.08\}$

(80) $7\cdot 3^{-3x+6} - 7\cdot 3^{-3x-5} = 5\cdot 3^{4x}\cdot 5^{x-1}$ **Lösungsmenge:** $L = \{0.92\}$

(81) $6\cdot 3^{7x-8} + 3^{7x+4} = 2\cdot 3^{-5x-5}\cdot 5^{9x+3}$ **Lösungsmenge:** $L = \{3.35\}$

(82) $7\cdot 3^{-9x+8} = 9\cdot 3^{-6x-1}\cdot 5^{9x-6}$ **Lösungsmenge:** $L = \{1.09\}$

(83) $3^{-8x} - 2\cdot 3^{-8x-2} = 8\cdot 3^{7x-8}\cdot 5^{5x-8}$ **Lösungsmenge:** $L = \{0.79\}$

(84) $3\cdot 3^{3x-1}\cdot 5^{-2x-9} = 3^{-7x+7}$ **Lösungsmenge:** $L = \{2.85\}$

(85) $-4\cdot 3^{2x-9} + 4\cdot 3^{2x-5} = 2\cdot 3^{6x-9}\cdot 5^{-9x+7}$ **Lösungsmenge:** $L = \{0.61\}$

(86) $5\cdot 3^{-7x+7} + 2\cdot 3^{-7x+8} = 9\cdot 3^{9x+2}\cdot 5^{9x-5}$ **Lösungsmenge:** $L = \{0.43\}$

---

[1] Logarithmische Rechengesetze: $\ln(u\cdot v) = \ln u + \ln v, \ln(\frac{u}{v}) = \ln u - \ln v, \ln u^n = n\cdot \ln u$