

Wurzelgleichungen (Beschränkung auf Quadratwurzeln)

Wurzelgleichungen sind Gleichungen, die Terme enthalten, bei denen die Variable unter dem Wurzelzeichen vorkommt. Das **Lösen von Wurzelgleichungen** erfolgt **in drei Schritten**:

- (1) Bestimmung der Definitionsmenge D aus der Bedingung, dass die Radikanden ≥ 0 sein müssen.
- (2) Rechnerische Lösung durch einmaliges oder mehrmaliges Quadrieren.
- (3) Für jede erhaltene Lösung muss die Probe gemacht werden, da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. (Lösungen können dazukommen, die keine Lösungen der Wurzelgleichung sind). Beachte auch, dass unter dem Symbol $\sqrt{\quad}$ nur der positive Wert gemeint ist.

Wurzelgleichungen, die mit einmaligem Quadrieren zu lösen sind

Typ 1: $\sqrt{ax+b} = cx+d$; **Typ 2:** $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$;

Beispiel: Löse in \mathbb{R} : $\sqrt{x-5} = 4$ (**Typ 1**)

- (1) $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$
- (2) $\sqrt{x-5} = 4 \mid$ Quadrieren
 $x-5 = 16 \Rightarrow x = 21$
- (3) $\sqrt{21-5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ w.A. $\Rightarrow 21$ ist Lösung. $L = \{21\}$

Weitere Beispiele:

(01) $\sqrt{x+7} = 2$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -7\}$; $L = \{-3\}$

(02) $\sqrt{3-2x} = 5$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1.5\}$; $L = \{-11\}$

(03) $\sqrt{-3x-5} = 4$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3}\}$; $L = \{-7\}$

(04) $\sqrt{2x-7} = 2$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3.5\}$; $L = \{5, 50\}$

Beispiel: Löse in \mathbb{R} : $\sqrt{x+2} = -3x-2$ (**Typ 1**)

- (1) $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$
- (2) $\sqrt{x+2} = -3x-2 \mid$ Gleichung quadrieren

$$x+2 = (-3x-2)^2$$

$$x+2 = 9x^2+12x+4$$

$$9x^2+11x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-72}}{18} = \frac{-11 \pm 7}{18} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{9}, x_2 = -1$$
- (3) $\sqrt{-\frac{2}{9}+2} = -3 \cdot (-\frac{2}{9}) - 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{6}{9} - 2 \Leftrightarrow \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ f.A. $\Rightarrow -\frac{2}{9}$ ist keine Lösung!
 $\sqrt{-1+2} = -3 \cdot (-1) - 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ w.A. $\Rightarrow -1$ ist Lösung. $L = \{-1\}$

Weitere Beispiele:

(05) $\sqrt{4x-3} = 3x-2$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0.75\}$; $L = \{\frac{7}{9}, 1\}$

(06) $\sqrt{4x-4} = 2x-2$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$; $L = \{1, 2\}$

(07) $\sqrt{5x+1} = x-1$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -0.2\}$; $L = \{7\}$

(08) $\sqrt{5x+4} = 2x+2$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -0.80\}; L = \{-0.75, 0\}$

(09) $\sqrt{5x+9} = 5x+3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}; L = \{0\}$

(10) $\sqrt{3x+1} = x+1$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{3}\}; L = \{0, 1\}$

(11) $\sqrt{-4x+2} = 2x-1$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0.50\}; L = \{0.50\}$

(12) $\sqrt{4x-7} = 2x-3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1.75\}; L = \{2\}$

Beispiel: Löse in \mathbb{R} : $\sqrt{x-3} = \sqrt{-x+5}$ (Typ 2)

(1) $\left. \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -x+5 \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$

(2) $\sqrt{x-3} = \sqrt{-x+5} \mid$ Quadrieren

$$x-3 = -x+5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

(3) $\sqrt{4-3} = \sqrt{-4+5} \Leftrightarrow \sqrt{1} = \sqrt{1} \Leftrightarrow 1 = 1$ w.A. $\Rightarrow 4$ ist Lösung. $L = \{4\}$

Weitere Beispiele:

(13) $\sqrt{x+7} = \sqrt{5x-1}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0.20\}; L = \{2\}$

(14) $\sqrt{x+5} = \sqrt{-4x}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 0\}; L = \{-1\}$

(15) $\sqrt{-x+6} = \sqrt{x+2}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 6\}; L = \{2\}$

(16) $\sqrt{3x-2} = \sqrt{2x-1}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\}; L = \{1\}$

(17) $\sqrt{-3x-5} = \sqrt{-x+1}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3}\}; L = \{-3\}$

(18) $\sqrt{-3x-6} = \sqrt{2x+4}$

Ergebnisse: $D = \{-2\}; L = \{-2\}$

(19) $\sqrt{-9x-9} = \sqrt{-7x+1}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}; L = \{-5\}$

(20) $\sqrt{-4x-7} = \sqrt{-3x-5}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1.75\}; L = \{-2\}$

(21) $\sqrt{5x-4} = \sqrt{x+9}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0.80\}; L = \{3.25\}$

(22) $\sqrt{-x+3} = \sqrt{4x+8}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}; L = \{-1\}$

(23) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{-4x-7}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2.5 \leq x \leq -1.75\}; L = \{-2\}$

(24) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{3x+1}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{3}\}; L = \{1\}$

(25) $\sqrt{3x+7} = \sqrt{4x+9}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2.25\}; L = \{-2\}$

(26) $\sqrt{x-7} = \sqrt{-x+9}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 9\}; L = \{8\}$

(27) $\sqrt{-8x-4} = \sqrt{-6x+6}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -0.50\}; L = \{-5\}$

(28) $\sqrt{3x+7} = \sqrt{-5x-9}$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{3} \leq x \leq -\frac{9}{5}\}; L = \{-2\}$

—— **Wurzelgleichungen, die mit zweimaligem Quadrieren zu lösen sind** ——

Typ 3: $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e$; **Typ 4:** $\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = e$

Typ 5: $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = \sqrt{ex+f}$; **Typ 6:** $\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = \sqrt{ex+f}$

Beispiel: Löse in \mathbb{R} : $\sqrt{x-7} + \sqrt{-x+8} = 1$ (**Typ 3**)

$$(1) \begin{cases} x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \\ -x+8 \geq 0 \Rightarrow x \leq 8 \end{cases} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 8\}$$

$$(2) \sqrt{x-7} + \sqrt{-x+8} = 1 \quad | \text{Wurzeln isolieren}$$

$$\sqrt{x-7} = 1 - \sqrt{-x+8} \quad | \text{Gleichung quadrieren}$$

$$x-7 = 1 - 2\sqrt{-x+8} - x + 8 \quad | \text{Wurzel isolieren}$$

$$2\sqrt{-x+8} = -2x + 16 \quad | :2$$

$$\sqrt{-x+8} = -x + 8 \quad | \text{Gleichung quadrieren}$$

$$-x + 8 = x^2 - 16x + 64$$

$$x^2 - 15x + 56 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - 56} = \frac{15}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 8, x_2 = 7$$

$$(3) \sqrt{8-7} + \sqrt{-8+8} = 1 \Leftrightarrow 1+0 = 1 \Leftrightarrow 1=1 \text{ w.A.} \Rightarrow 8 \text{ ist Lösung.}$$

$$\sqrt{7-7} + \sqrt{-7+8} = 1 \Leftrightarrow 0+1 = 1 \Leftrightarrow 1=1 \text{ w.A.} \Rightarrow 7 \text{ ist Lösung.} \quad L = \{7, 8\}$$

Weitere Beispiele:

(29) $\sqrt{2x+4} + \sqrt{-4x+1} = 3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0.25\}$; $L = \{-2, 0\}$

(30) $\sqrt{x+8} + \sqrt{-x+9} = 5$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 9\}$; $L = \{-7, 8\}$

(31) $\sqrt{-6x+1} + \sqrt{x+8} = 7$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq \frac{1}{6}\}$; $L = \{-8, -4\}$

(32) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -0.50\}$; $L = \{4\}$

(33) $\sqrt{-x+8} + \sqrt{5x-4} = 6$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0.80 \leq x \leq 8\}$; $L = \{4, 8\}$

(34) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{-x+3} = 3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1.50 \leq x \leq 3\}$; $L = \{-1, 3\}$

(35) $\sqrt{-x+3} + \sqrt{-2x+4} = 7$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$; $L = \{-6\}$

(36) $\sqrt{-x+7} + \sqrt{2x-5} = 3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2.5 \leq x \leq 7\}$; $L = \{3, 7\}$

(37) $\sqrt{-x+4} + \sqrt{x+1} = 3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$; $L = \{0, 3\}$

(38) $\sqrt{x+6} + \sqrt{-x-1} = 3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq -1\}$; $L = \{-5, -2\}$

(39) $\sqrt{-2x+8} + \sqrt{2x-4} = 2$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$; $L = \{2, 4\}$

(40) $\sqrt{x+9} + \sqrt{-5x-9} = 6$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x \leq -1.8\}$; $L = \{-9, -5\}$

(41) $\sqrt{-4x+9} + \sqrt{2x} = 3$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2.25\}$; $L = \{0, 2\}$

(42) $\sqrt{-x+2} + \sqrt{-2x} = 4$

Ergebnisse: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$; $L = \{-2\}$

Beispiel: Löse in \mathbb{R} : $\sqrt{5x+4} - \sqrt{3x-2} = 2$ (Typ 4)

$$(1) \left. \begin{array}{l} 5x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -0.8 \\ 3x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

$$(2) \sqrt{5x+4} - \sqrt{3x-2} = 2 \quad | \text{Wurzeln isolieren}$$

$$\sqrt{5x+4} = 2 + \sqrt{3x-2} \quad | \text{Gleichung quadrieren}$$

$$5x+4 = 4 + 4\sqrt{3x-2} + 3x-2 \quad | \text{Wurzel isolieren}$$

$$-4\sqrt{3x-2} = -2x-2 \quad | :(-2)$$

$$2\sqrt{3x-2} = x+1 \quad | \text{Gleichung quadrieren}$$

$$12x-8 = x^2 + 2x+1 \Leftrightarrow x^2 - 10x+9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-9} = 5 \pm 4$$

$$x_1 = 9, x_2 = 1$$

$$(3) \sqrt{5+4} - \sqrt{3-2} = 2 \Leftrightarrow 3-1=2 \Leftrightarrow 2=2 \text{ w.A.} \Rightarrow 1 \text{ ist Lösung.}$$

$$\sqrt{45+4} - \sqrt{27-2} = 2 \Leftrightarrow 7-5=2 \Leftrightarrow 2=2 \text{ w.A.} \Rightarrow 9 \text{ ist Lösung.} \quad L = \{1,9\}$$

Weitere Beispiele:

$$(43) \sqrt{-6x+1} - \sqrt{-3x-8} = 3$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{3} \right\}; L = \{-8, -4\}$

$$(44) \sqrt{x-6} - \sqrt{3x-5} = -3$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6 \right\}; L = \{7, 10\}$

$$(45) \sqrt{x-5} - \sqrt{4x} = -4$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \right\}; L = \left\{ \frac{49}{9}, 9 \right\}$

$$(46) \sqrt{-5x-6} - \sqrt{-7x-5} = -1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1.20 \right\}; L = \{-3, -2\}$

$$(47) \sqrt{7x+8} - \sqrt{2x-7} = 5$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3.50 \right\}; L = \{4, 8\}$

$$(48) \sqrt{4x-3} - \sqrt{-2x+6} = -1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0.75 \leq x \leq 3 \right\}; L = \{1\}$

$$(49) \sqrt{-4x+8} - \sqrt{-3x+4} = 1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4}{3} \right\}; L = \{-7, 1\}$

$$(50) \sqrt{-8x+1} - \sqrt{-6x-2} = 1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{3} \right\}; L = \{-3, -1\}$

$$(51) \sqrt{4x} - \sqrt{-3x+4} = 1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \right\}; L = \{1\}$

$$(52) \sqrt{5x} - \sqrt{9x+4} = -2$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \right\}; L = \{0, 5\}$

$$(53) \sqrt{-9x+9} - \sqrt{-3x-8} = 5$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{3} \right\}; L = \{-8, -3\}$

$$(54) \sqrt{-5x-4} - \sqrt{-9x} = -2$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -0.80 \right\}; L = \{-4, -1\}$

$$(55) \sqrt{4x+5} - \sqrt{2x+6} = -1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1.25 \right\}; L = \{-1\}$

$$(56) \sqrt{-x-6} - \sqrt{-3x-5} = -3$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \right\}; L = \{-10, -7\}$

$$(57) \sqrt{3x+4} - \sqrt{-4x} = -1$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3}x \leq 0 \right\}; L = \{-1\}$

$$(58) \sqrt{4x+5} - \sqrt{-3x+4} = 2$$

Ergebnisse: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1.25 \leq x \leq \frac{4}{3} \right\}; L = \{1\}$