——— Lineare Gleichungssysteme (2 Gleichungen mit 2 Variablen) ———

Normalform eines linearen Gleichungssystems $\begin{cases} \mathbf{a_1x+b_1y=c_1} \\ \mathbf{a_2x+b_2y=c_2} \end{cases}$ $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i=1,2$

Es gibt **drei Lösungsfälle**:

1. Fall: Die Lösungsmenge ist *einelementig* (eindeutige Lösbarkeit).
2. Fall: Die Lösungsmenge ist *leer* (Unlösbarkeit).
3. Fall: Die Lösungsmenge ist *unendlich*.

Rechnerische Methoden zur Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Variablen

(1) Einsetzungs- oder Substitutionsmethode
(2) Gleichsetzungsmethode
(3) Methode der gleichen Koeffizienten
(4) GAUSS´sches Eliminationsverfahren = Verallgemeinerung der Methode (3)
(5) Determinantenmethode (CRAMER´sche Regel) im Fall eindeutiger Lösbarkeit.

Wert einer zweizeiligen Determinante: $\mathbf{D=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc}$

Oft ist es zweckmäßig, ein lineares Gleichungssystem auf seine **eindeutige Lösbarkeit** zu untersuchen. Diese ist genau dann gegeben, wenn die *Systemdeterminante verschieden von null* ist.

Beispiel: Ermittle die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\begin{cases} 6x+y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Methode (1): $\begin{cases} 6x+y=1 \Rightarrow y=1-6x \text{ in die zweite Gleichung einsetzen!} \\ 2x+y=5 \Rightarrow 2x+(1-6x)=5 \Rightarrow -4x=4 \Rightarrow x=-1;\ y=1-6\cdot(-1)=7 \end{cases}$ $L=\{(-1/7)\}$

Methode (2): $\begin{cases} 6x+y=1 \Rightarrow y=1-6x \\ 2x+y=5 \Rightarrow y=5-2x \end{cases}$

Gleichsetzen ergibt: $1-6x=5-2x \Rightarrow -4x=4 \Rightarrow x=-1$
$y=1-6x=1-6\cdot(-1)=7$ $L=\{(-1/7)\}$

Methode (3): $\begin{cases} 6x+y=1 \,|\cdot 1 \\ 2x+y=5 \,|\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+y=1 \\ -2x-y=-5 \end{cases}$

Addieren beider Gleichungen ergibt: $4x=-4 \Rightarrow x=-1$
$y=1-6x=1-6\cdot(-1)=7$ $L=\{(-1/7)\}$

Methode (4): $\begin{cases} 6x+y=1 \,|\cdot 1 \\ 2x+y=5 \,|\cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+y=1 \\ -6x-3y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+y=1 \\ -2y=-14 \Rightarrow y=7 \end{cases}$

Aus der 1. Gleichung folgt: $6x=1-y=-6 \Rightarrow x=-1$ $L=\{(-1/7)\}$

Methode (5): $D=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot1-2\cdot1=4;\ D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot1-5\cdot1=-4;\ D_y=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=6\cdot5-2\cdot1=28$

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-4}{4}=-1;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{28}{4}=7$ $L=\{(-1/7)\}$

Zur **Probe** werden die Lösungen an Stelle der Variablen in die gegebenen Gleichungen eingesetzt und nachgeprüft, ob sich wahre Aussagen ergeben.

1. Gleichung: $6\cdot(-1)+7=1$, $1=1\,|$ wahre Aussage   2. Gleichung: $2\cdot(-1)+7=5$, $5=5\,|$ wahre Aussage

Beispiele für eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

(01) $\begin{cases} -2x+3y=-6 \\ -4x+y=-2 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(0/-2)\}$

(02) $\begin{cases} 11x-7y=-4 \\ 7x-4y=-3 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(-1/-1)\}$

(03) $\begin{cases} -2x+7y=1 \\ x-4y=-8 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(52/15)\}$

(04) $\begin{cases} 2x+9y=-1 \\ x-6y=-10 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(32/7)\}$

(05) $\begin{cases} 3x+4y=8 \\ -x-3y=-1 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(4/-1)\}$

(06) $\begin{cases} -x-y=1 \\ 8x+5y=1 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(2/-3)\}$

(07) $\begin{cases} -5x+6y=6 \\ 8x-11y=-4 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(-6/-4)\}$

(08) $\begin{cases} -8x+10y=4 \\ 9x-11y=-10 \end{cases}$ **Lösungsmenge:** $L=\{(-28/-22)\}$

Beispiele für nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme:

(1) $\begin{cases} 3x-4y=-8 & |\cdot(-2) \\ -6x+8y=16 & |\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+8y=16 \\ -6x+8y=16 \end{cases}$ Das sind zwei identische Gleichungen!

Die Lösungsmenge des Systems ist unendlich, es gilt: $L=\left\{(x/y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, y=\frac{3}{4}x+2\right\}$

(2) $\begin{cases} 3x-4y=5 & |\cdot 2 \\ -6x+8y=-5 & |\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8y=10 \\ -6x+8y=-5 \end{cases}$

Addieren beider Gleichungen ergibt die falsche Aussage: $0=5$

Die Lösungsmenge des Systems ist leer, es gilt: $L=\{\ \}$. Das System ist unlösbar.

Beispiele:

(09) $\begin{cases} -2x+3y=-6 \\ 6x-9y=18 \end{cases}$ **Lösungsmenge ist unendlich:** $L=\left\{(x/y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, y=\frac{2}{3}x-2\right\}$

(10) $\begin{cases} 14x-6y=-5 \\ -7x+3y=2.5 \end{cases}$ **Lösungsmenge ist unendlich:** $L=\left\{(x/y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, y=\frac{7}{3}x+\frac{5}{6}\right\}$

(11) $\begin{cases} 3x-5y=9 \\ -12x+20y=-36 \end{cases}$ **Lösungsmenge ist unendlich:** $L=\left\{(x/y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, y=\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}\right\}$

(12) $\begin{cases} -4x-7y=8 \\ 12x+21y=-18 \end{cases}$ **Lösungsmenge ist leer:** $L=\{\ \}$. Das System ist unlösbar.

(13) $\begin{cases} 28x-6y=-15 \\ -14x+3y=15 \end{cases}$ **Lösungsmenge ist leer:** $L=\{\ \}$. Das System ist unlösbar.

(14) $\begin{cases} -17x+2y=0 \\ 34x-4y=10 \end{cases}$ **Lösungsmenge ist leer:** $L=\{\ \}$. Das System ist unlösbar.