Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Unter einer **Potenz** versteht man ein **Produkt aus gleichen Faktoren**.

$\underbrace{a}_{1-\text{mal}} = a^1 \qquad \underbrace{a \cdot a}_{2-\text{mal}} = a^2 \qquad \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3-\text{mal}} = a^3 \qquad \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4-\text{mal}} = a^4 \qquad \underbrace{\mathbf{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{\textbf{n-mal}} = \mathbf{a^n}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$

Man nennt: **a… Basis** (Grundzahl), **n… Exponent** (Hochzahl), $\mathbf{a^n}$ **… Potenz** (Potenzwert).

Es gilt: $a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}^*$ (Potenzen mit negativen Exponenten)

Für die Basis 0 gilt: $0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. 0^0 und 0^{-n} sind *nicht* definiert.

Beispiele: Gib in Potenzschreibweise an: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (a-3) \cdot (a-3)$.

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (a-3) \cdot (a-3) = 4^3 (a-3)^2$

Ermittle den Wert von 2^{-3}.

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

Vorzeichen des Potenzwertes:

Ist die *Basis* a *positiv*, dann ist auch a^n *positiv*, für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Ist die *Basis* a *negativ*,
- dann ist a^n *positiv*, wenn der *Exponent* $n \in \mathbb{Z}$ eine *gerade* Zahl ist.
- dann ist a^n *negativ*, wenn der *Exponent* $n \in \mathbb{Z}$ eine *ungerade* Zahl ist.

Beispiele: $5^2 = 25$ ist positiv, $5^3 = 125$ ist positiv. $(-5)^2 = 25$ ist positiv, $(-5)^3 = -125$ ist negativ.

Ähnliche Beispiele:

(01) $-2^3 + (-2)^3 =; \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 =; 2^{-3} + 2^3 =; \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2} =$ **Ergebnisse:** $-16; \frac{35}{64}; \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}; 1$

(02) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} =; \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2^{-2} =; 4^{-2} + \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} =; \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} =$ **Ergebnisse:** $25; \frac{13}{16}; \frac{5}{8}; -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$

Regeln für das Rechnen mit Potenzen (Potenzregeln)			**Beispiele:**
(1)	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	bei gleicher Basis die Hochzahlen addieren	$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$
(2)	$a^n : a^m = a^{n-m}$	bei gleicher Basis die Hochzahlen subtrahieren	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$
(3)	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	bei gleicher Hochzahl die Basen multiplizieren	$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5$
(4)	$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	bei gleicher Hochzahl die Basen dividieren	$2^5 : 3^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
(5)	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Jeder Faktor wird potenziert.	$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$
(6)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Zähler und Nenner werden potenziert.	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$
(7)	$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	Hochzahlen multiplizieren, Basis bleibt gleich	$\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

Die **Addition und Subtraktion von Potenzen** ist nur für *gleichnamige Potenzen* möglich, also für Potenzen mit *gleicher Basis* und *gleichem Exponenten*.

Beispiele: Berechne:

$$5a^3 - 2a^2 + 3a - 4a^3 + a^2 - 2a = 5a^3 - 4a^3 - 2a^2 + a^2 + 3a - 2a = a^3 - a^2 + a$$

$$7ab^3 + 5a^2b - 9ab - (3ab^3 - 2a^2b + ab) = 7ab^3 - 3ab^3 + 5a^2b + 2a^2b - 9ab - ab = 4ab^3 + 7a^2b - 10ab$$

Merke: Es lassen sich nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten zusammenfassen.

Ähnliche Beispiele:

(03) $-7b^2 + 6a^3 + 5b - 3a + 10b^2 - 4a^3 + b - 2a =$ **Ergebnis:** $3b^2 + 2a^3 - 5a + 6b$

(04) $3ax^2 + 5b^3y^2 - 7abx^2 - (5ax^2 + 2abx^2 - 3b^3y^2) =$ **Ergebnis:** $-2ax^2 + 2b^3y^2 - 5abx^2$

Die **Multiplikation von Potenzen** erfolgt unter Beachtung der Regeln von Seite 90.

Beispiele: Berechne:

$$5a^3 \cdot 2a^2 = 10a^{3+2} = 10a^5$$

$$3a^2b^3c \cdot 8a^4bc^2 = 24a^{2+4}b^{3+1}c^{1+2} = 24a^6b^4c^3$$

$$4ab^2c^2 \cdot 5a^2b^2c^3 - 3a^2bc^3 \cdot 4ab^3c^2 = 20a^3b^4c^5 - 12a^3b^4c^5 = 8a^3b^4c^5$$

$$2ax^3y^2 \cdot (7xy^2 - 5x^2y + 4x^3y^2) = 14ax^4y^4 - 10ax^5y^3 + 8ax^6y^4$$

$$9b^3(x+2y)^2 \cdot 3a^3(x+2y) = 27a^3b^3(x+2y)^3 = [3ab(x+2y)]^3$$

Ähnliche Beispiele:

(05) $2b^3 \cdot 4b^4 =$ **Ergebnis:** $8b^7$

(06) $5a^3b^2x^2 \cdot 4a^5b^3x^2 =$ **Ergebnis:** $20a^8b^5x^4$

(07) $5x^2yz^3 \cdot 6xy^2z^2 - 3xyz \cdot 7x^2y^2z^4 =$ **Ergebnis:** $9x^3y^3z^5$

(08) $3b^2c^2y^2 \cdot (5cy^3 + 4c^2y^2 - 8c^3y) =$ **Ergebnis:** $15b^2c^3y^5 + 12b^2c^4y^4 - 24b^2c^5y^3$

(09) $2x^3y^2(3a-b) \cdot 8xy^2(3a-b)^3 =$ **Ergebnis:** $16x^4y^4(3a-b)^4 = [2xy(3a-b)]^4$

Beispiele: Berechne und stelle die Ergebnisse mit positiven Exponenten dar.

$$7a^4 \cdot 2a^{-2} = 14a^{4-2} = 14a^2$$

$$5a^{-2}b^3c^{-2} \cdot 3a^4b^{-1}c^2 = 15a^{-2+4}b^{3-1}c^{-2+2} = 15a^2b^2c^0 = 15a^2b^2 \text{ (Beachte: } c^0 = 1\text{)}$$

$$3xy^{-2}z^3 \cdot 7x^3y^{-1}z^2 - 3x^2y^{-1}z^2 \cdot 3x^2y^{-2}z^3 = 21x^4y^{-3}z^5 - 9x^4y^{-3}z^5 = 12x^4y^{-3}z^5 = \frac{12x^4z^5}{y^3}$$

$$4bx^3y^{-2} \cdot (x^{-1}y^2 - 2x^{-4}y + 5xy^{-2}) = 4bx^2y^0 - 8bx^{-1}y^{-1} + 20bx^4y^{-4} = 4bx^2 - \frac{8b}{xy} + \frac{20bx^4}{y^4}$$

Ähnliche Beispiele:

(10) $8x^5 \cdot 4x^{-3} =$ **Ergebnis:** $32x^2$

(11) $3a^{-2}x^4y^3 \cdot 6a^3x^{-2}y^{-3} =$ **Ergebnis:** $18ax^2$

(12) $4x^3y^{-1}z^2 \cdot 6x^2y^{-3}z^{-1} - 8x^2y^{-3}z^{-2} \cdot 2x^3y^{-1}z^3 =$ **Ergebnis:** $8x^5y^{-4}z = \frac{8x^5z}{y^4}$

(13) $5ax^{-3}y^3 \cdot (xy^{-2} - 2x^3y^{-1} + 3x^4y^{-4}) =$ **Ergebnis:** $\frac{5ay}{x^2} - 10ay^2 + \frac{15ax}{y}$

Die **Division von Potenzen** erfolgt unter Beachtung der Regeln von Seite 90.

Beispiele: Berechne:

$8a^5 : 2a^3 = 4a^{5-3} = 4a^2$

$9a^4b^3c^5 : 3a^3bc^2 = 3a^{4-3}b^{3-1}c^{5-2} = 3ab^2c^3$

$18a^4b^5c^3 : 3a^2b^2c - 3a^3b^4c^5 : abc^3 = 6a^2b^3c^2 - 3a^2b^3c^2 = 3a^2b^3c^2$

$(14a^2x^4y^3 - 8a^2x^5y^4 + 6a^2x^3y^2) : 2ax^2y = 7ax^2y^2 - 4ax^3y^3 + 3axy$

$\frac{24a^4b^3x^5}{4a^2b^2x^3} \cdot \frac{9a^5b^4x^2}{3a^2b^2x} = 6a^2bx^2 \cdot 3a^3b^2x = 18a^5b^3x^3$

$\frac{36a^5b^4x^5}{9a^2b^2x^3} : \frac{6a^2b^2x^2}{18a^4b^3x^3} = \frac{36a^5b^4x^5}{9a^2b^2x^3} \cdot \frac{18a^4b^3x^3}{6a^2b^2x^2} = 4a^3b^2x^2 \cdot 3a^2bx = 12a^5b^3x^3$

Ähnliche Beispiele:

(14) $9b^6 : 3b^2 =$ **Ergebnis:** $3b^4$

(15) $4a^5b^4c^3 : 16a^3b^3c =$ **Ergebnis:** $\frac{1}{4}a^2bc^2$

(16) $24a^5b^3c^4 : 4a^3b^2c - 2a^4b^2c^5 : a^2bc^2 =$ **Ergebnis:** $2a^2bc^3$

(17) $(9a^3x^4y^5 - 15a^3x^5y^4 + 12a^4x^3y^5) : 3a^2xy^2 =$ **Ergebnis:** $3ax^3y^3 - 5ax^4y^2 + 4a^2x^2y^3$

(18) $\frac{21a^3b^4x^4}{3a^2b^3x^3} \cdot \frac{5a^4b^5x^3}{7a^2b^2x} =$ **Ergebnis:** $5a^3b^4x^3$

(19) $\frac{18a^4b^5x^4}{3ab^3x^2} : \frac{12a^3bx^2}{8a^5b^2x^4} =$ **Ergebnis:** $4a^5b^3x^4$

Beispiele: Berechne und stelle die Ergebnisse mit positiven Exponenten dar.

$12b^3 : 4b^5 = 3b^{3-5} = 3b^{-2} = \frac{3}{b^2}$

$4a^{-5}b^3c^4 : 8a^{-3}b^2c^3 = \frac{1}{2}a^{-5+3}b^{3-2}c^{4-3} = \frac{1}{2}a^{-2}bc = \frac{bc}{2a^2}$

$16a^{-2}b^5c^3 : 4ab^3c^{-2} - 2a^{-1}b^4c^4 : a^2b^2c^{-1} = 4a^{-3}b^2c^5 - 2a^{-3}b^2c^5 = 2a^{-3}b^2c^5 = \frac{2b^2c^5}{a^3}$

$(9a^3x^{-3}y^3 - 12a^{-3}x^2y^{-2} + 6ax^{-1}y^3) : 3ax^{-3}y^2 = 3a^2x^0y - 4a^{-4}x^5y^{-4} + 2a^0x^2y = 3a^2y - \frac{4x^5}{a^4y^4} + 2x^2y$

$\frac{18a^2b^{-3}x^4}{2a^3b^{-1}x^2} \cdot \frac{6a^{-4}b^5x}{2a^{-2}b^2x^2} = 9a^{-1}b^{-2}x^2 \cdot 3a^{-2}b^3x^{-1} = 27a^{-3}bx = \frac{27bx}{a^3}$

$\frac{21a^4b^2x}{7a^2b^{-2}x^{-3}} : \frac{5a^{-3}b^2x^2}{15a^{-1}b^{-3}x^3} = \frac{21a^4b^2x}{7a^2b^{-2}x^{-3}} \cdot \frac{15a^{-1}b^{-3}x^3}{5a^{-3}b^2x^2} = 3a^2b^4x^4 \cdot 3a^2b^{-5}x = 9a^4b^{-1}x^5 = \frac{9a^4x^5}{b}$

Ähnliche Beispiele:

(20) $3a^2 : 12a^3 =$ **Ergebnis:** $\frac{1}{4a}$

(21) $15a^{-4}b^2c^{-4} : 3a^{-3}bc^{-2} =$ **Ergebnis:** $5a^{-1}bc^{-2} = \frac{5b}{ac^2}$

(22) $18a^{-3}b^4c : 6a^{-1}b^2c^{-2} - a^{-4}b^3c^5 : 2a^{-2}bc^2 =$ **Ergebnis:** $\frac{5}{2}a^{-2}b^2c^3 = \frac{5b^2c^3}{2a^2}$

(23) $\frac{24a^3b^{-3}x^5}{3a^2b^{-2}x^3} \cdot \frac{a^2b^{-5}x}{3a^{-1}b^{-2}x^3} =$ **Ergebnis:** $\frac{8}{3}a^4b^{-4}x^0 = \frac{8a^4}{3b^4}$

(24) $\frac{3a^2b^{-5}x}{a^{-1}b^{-2}x^{-3}} : \frac{3a^3b^{-3}x^5}{8a^2b^{-2}x^3} =$ **Ergebnis:** $\frac{1}{8}a^{-2}b^2x^{-4} = \frac{b^2}{8a^2x^4}$

Das **Potenzieren von Potenzen** erfolgt unter Beachtung der Regeln von Seite 90.

Beispiele: Berechne und stelle die Ergebnisse mit positiven Exponenten dar.

$$\left(2a^2b^3c\right)^3 = 2^3 a^{2\cdot3} b^{3\cdot3} c^{1\cdot3} = 8a^6b^9c^3$$

$$\left(3a^{-2}b^3c^{-1}\right)^2 = 3^2 a^{-2\cdot2} b^{3\cdot2} c^{-1\cdot2} = 9a^{-4}b^6c^{-2} = \frac{9b^6}{a^4c^2}$$

$$\left(2a^2b^{-1}c^{-2}\right)^{-3} = 2^{-3} a^{2\cdot(-3)} b^{-1\cdot(-3)} c^{-2\cdot(-3)} = \frac{1}{8}a^{-6}b^3c^6 = \frac{b^3c^6}{8a^6}$$

$$\left(\frac{2x^3y^{-2}z}{3x^{-3}yz^4}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}x^{3\cdot(-2)}y^{(-2)\cdot(-2)}z^{1\cdot(-2)}}{3^{-2}x^{(-3)\cdot(-2)}y^{1\cdot(-2)}z^{4\cdot(-2)}} = \frac{2^{-2}x^{-6}y^4z^{-2}}{3^{-2}x^6y^{-2}z^{-8}} = \frac{9}{4}x^{-12}y^6z^6 = \frac{9y^6z^6}{4x^{12}}$$

Ähnliche Beispiele:

(25) $\left(3ab^2c^3\right)^4 =$ **Ergebnis:** $81a^4b^8c^{12}$

(26) $\left(2a^{-3}b^2c^{-1}\right)^3 =$ **Ergebnis:** $8a^{-9}b^6c^{-3} = \frac{8b^6}{a^9c^3}$

(27) $\left(4a^{-3}b^2c^{-1}\right)^{-2}$ **Ergebnis:** $(4)^{-2}a^6b^{-4}c^2 = \frac{8a^6c^2}{16b^4}$

(28) $\left(\frac{3x^2y^{-3}z^{-1}}{2x^3y^{-2}z^{-2}}\right)^{-3}$ **Ergebnis:** $\frac{8}{27}x^3y^3z^{-3} = \frac{8x^3y^3}{27z^3}$

Beispiele: Berechne und stelle die Ergebnisse mit positiven Exponenten dar.

$$\left(\frac{2a^2x^{-1}}{3b^3y^{-2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^2x^{-2}}{2b^3y^{-1}}\right)^{-2} = \frac{8a^6x^{-3}}{27b^9y^{-6}} \cdot \frac{a^{-4}x^4}{2^{-2}b^{-6}y^2} = \frac{8\cdot4a^2x}{27b^3y^{-4}} = \frac{32a^2xy^4}{27b^3}$$

$$\left(\frac{a^2x^{-2}}{2b^3y^{-1}}\right)^{-3} : \left(\frac{2a^2x^{-1}}{3b^3y^{-2}}\right)^2 = \frac{a^{-6}x^6}{2^{-3}b^{-9}y^3} \cdot \frac{3^2b^6y^{-4}}{2^2a^4x^{-2}} = \frac{3^2a^{-6}b^6x^6y^{-4}}{2^{-1}a^4b^{-9}y^3x^{-2}} = 3^2\cdot2\cdot a^{-10}b^{15}x^8y^{-7} = \frac{18b^{15}x^8}{a^{10}y^7}$$

$$\left(\frac{-2u^{-4}x}{3v^3y^{-1}z}\right)^2 \cdot \left(\frac{5vy^{-2}z^2}{3u^4x^{-3}}\right)^{-3} = \frac{4u^{-8}x^2}{3^2v^6y^{-2}z^2} \cdot \frac{5^{-3}v^{-3}y^6z^{-6}}{3^{-3}u^{-12}x^9} = \frac{3\cdot4\cdot u^{-8}v^{-3}x^2y^6z^{-6}}{5^3u^{-12}v^6x^9y^{-2}z^2} = \frac{12u^4y^8}{125v^9x^7z^8}$$

Ähnliche Beispiele:

(29) $\left(\frac{a^{-2}x^2}{4b^{-3}y^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a^{-2}x^3}{2b^2y^{-2}}\right)^3 =$ **Ergebnis:** $\frac{2x^5y^{12}}{a^2b^{12}}$

(30) $\left(\frac{4a^{-2}x}{b^3y^{-2}}\right)^3 : \left(\frac{a^{-2}x^2}{4b^{-3}y^3}\right)^{-2}$ **Ergebnis:** $\frac{4x^7}{a^{10}b^3}$

(31) $\left(-\frac{3u^{-2}x^3z}{2v^2y^{-2}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3v^{-1}y^{-2}}{5u^4x^{-5}z^{-2}}\right)^2$ **Ergebnis:** $-\frac{8v^4xz}{75u^2y^{10}}$

(32) $\left(\frac{2u^{-2}v^3w}{3x^2y^{-2}z}\right)^{-2} : \left(\frac{3u^{-1}v^{-2}w}{4x^2y^{-1}z^{-2}}\right)^3$ **Ergebnis:** $\frac{16u^7x^{10}}{3w^5y^7z^4}$