Erweitern und Kürzen von Bruchtermen

Ein **Bruchterm** (gebrochen rationaler Term) ist ein Ausdruck der Gestalt: $\frac{T_1(x)}{T_2(x)}$.

Er ist für jene Zahlen der Grundmenge *nicht* definiert, für die $T_2(x) = 0$ ist.

Beim **Erweitern** wird der Zähler und der Nenner *mit demselben Term* $T \neq 0$ *multipliziert.*

Beim **Kürzen** wird der Zähler und der Nenner durch *denselben Term* $T \neq 0$ *dividiert.*
Der *gegebene* **Bruchterm** und der *erweiterte* bzw. *gekürzte* Bruchterm sind *bezüglich* der *Durchschnittsmenge ihrer Definitionsmengen* **äquivalent (gleichwertig)**, d.h.: dass die Terme bei jeder Belegung der Variablen durch Zahlen dieser Menge jeweils den gleichen Termwert ergeben.

Beispiele: *Erweitere* den Term $\frac{5x}{3}$ mit dem Term $x-2 \neq 0$ und stelle fest, bezüglich welcher Menge gegebener und erweiterter Term *äquivalent* sind. Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

$$\frac{5x}{3} = \frac{5x(x-2)}{3(x-2)} = \frac{5x^2-10x}{3x-6}$$

$D_1 = \mathbb{R}$ $\quad$ $D_2 = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\quad$ **Ergebnis**: Äquivalent bezüglich $D_1 \cap D_2 = D_2 = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Ähnliche Beispiele:

(01) Erweitere $\frac{4x}{5}$ mit $2x+5$ **Ergebnis:** $\frac{8x^2+20x}{10x+25}$, $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

(02) Erweitere $\frac{2}{7x}$ mit $4x-1$ **Ergebnis:** $\frac{8x-2}{28x^2-7x}$, $D = \mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{1}{4}\right\}$

(03) Erweitere $\frac{5x}{x+1}$ mit $x-1$ **Ergebnis:** $\frac{5x^2-5x}{x^2-1}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

Beispiele: *Kürze* den Term $\frac{x^2-16}{3(x+4)}$ durch den Term $x+4 \neq 0$ und stelle fest, bezüglich welcher Menge gegebener und gekürzter Term *äquivalent* sind. Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2-16}{3(x+4)} = \frac{(x-4)\cdot\cancel{(x+4)}}{3\cancel{(x+4)}} = \frac{(x-4)}{3}$$

$D_1 = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$ $\quad$ $D_2 = \mathbb{R}$ $\quad$ **Ergebnis**: Äquivalent bezüglich $D_1 \cap D_2 = D_1 = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Ähnliche Beispiele:

(04) Kürze $\frac{4x^2-9}{2x-3}$ durch $2x-3$ **Ergebnis:** $2x+3$, $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

(05) Kürze $\frac{x^3-16x}{x+4}$ durch $x+4$ **Ergebnis:** $x(x-4)$, $D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

(06) Kürze $\frac{x^2+3x-10}{2(x+5)}$ durch $x+5$ **Ergebnis:** $\frac{x-2}{2}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{-5\}$

Beim **Kürzen** eines Bruchterms geht man zweckmäßigerweise so vor, dass man den Zähler und den Nenner auf **gemeinsame Faktoren** untersucht. Diese **Faktoren** kann man dann **weglassen**, wodurch sich der gekürzte Bruchterm ergibt.
Bei **Summentermen** müssen zunächst die **gemeinsamen Faktoren herausgehoben** werden.

Beispiele: *Kürze* folgende Terme durch den gemeinsamen Faktor von Zähler und Nenner.

(a) $\frac{5a^2}{3a}=\frac{5a\cdot\cancel{a}}{3\cancel{a}}=\frac{5a}{3}$ **(b)** $\frac{36a^3}{15a^2}=\frac{\cancel{3}\cdot 12\cancel{a^2}\cdot a}{\cancel{3}\cdot 5\cancel{a^2}}=\frac{12a}{5}$ **(c)** $\frac{16a^3+6a}{14a^2-2a}=\frac{\cancel{2a}(8a^2+3)}{\cancel{2a}(7a-1)}=\frac{8a^2+3}{7a-1}$

Ähnliche Beispiele:

(07) $\frac{16a^3}{48a^2}=$ **Ergebnis:** $\frac{a}{3}$

(08) $\frac{2a+10}{3a+15}=$ **Ergebnis:** $\frac{2}{3}$

(09) $\frac{5a^2}{a-6a^2}=$ **Ergebnis:** $\frac{5a}{1-6a}$

(10) $\frac{12a^4-a^2}{6a^4}=$ **Ergebnis:** $\frac{12a^2-1}{6a^2}$

(11) $\frac{a^2+12a^3}{15a^4-4a^2}=$ **Ergebnis:** $\frac{1+12a}{15a^2-4}$

(12) $\frac{21a^2-14a^4}{14a+7a^3}=$ **Ergebnis:** $\frac{3a-2a^3}{2+a^2}$

Beispiele: *Kürze* folgende Terme durch den gemeinsamen Faktor von Zähler und Nenner.

(a) $\frac{-10a^3b^2}{5a^2b^4}=-\frac{2\cdot\cancel{5a^2}\cdot a\cancel{b^2}}{\cancel{5a^2}b^2\cdot\cancel{b^2}}=-\frac{2a}{b^2}$ **(b)** $\frac{8a^3b^2-8a^3b^4}{16ab^2+4a^4b^3}=\frac{2\cdot\cancel{4ab^2}a^2(1-b^2)}{\cancel{4ab^2}(4+a^3b)}=\frac{2\cdot a^2(1-b^2)}{4+a^3b}$

Ähnliche Beispiele:

(13) $\frac{20a^2b^3}{4a^3b^4}=$ **Ergebnis:** $\frac{5}{ab}$

(14) $\frac{12ab-18b}{24b^2}=$ **Ergebnis:** $\frac{2a-3}{4b}$

(15) $\frac{2a^7b^5}{7a^6b^2+5a^6b^5}=$ **Ergebnis:** $\frac{2ab^3}{7+5b^3}$

(16) $\frac{8b^3-2a^3b}{-8b^2-2a^3b}=$ **Ergebnis:** $\frac{4b^2-a^3}{-4b-a^3}=\frac{a^3-4b^2}{a^3+4b}$

(17) $\frac{12a^5b^3-4b^5}{4ab^5+8a^2b^4}=$ **Ergebnis:** $\frac{3a^5-b^2}{ab^2+2a^2b}$

(18) $\frac{-6a^6b^7}{-3a^6b-3a^4b^6}=$ **Ergebnis:** $\frac{2a^2b^6}{a^2+b^5}$

(19) $\frac{15ab}{20ac-25ab}=$ **Ergebnis:** $\frac{3b}{4c-5b}$

(20) $\frac{-28ac+21ab}{21ab-56ac}=$ **Ergebnis:** $\frac{3b-4c}{4b-8c}$

(21) $\frac{14ab^2c-28a^2b}{56abc}=$ **Ergebnis:** $\frac{bc-2a}{4c}$

(22) $\frac{36a^2b^2c^2-6a^3c^3}{12a^3c^2+18a^2c^3}=$ **Ergebnis:** $\frac{6b^2-ac}{2a+3c}$